ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, θεώρημα, σελίδα 304 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $z+\dfrac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$.

Άρα $z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i,\quad z_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$.

Β2. Είναι: $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=\left[(1-i)^2\right]^{1005}+\left[(1+i)^2\right]^{1005}=$

$$=(1-2i-1)^{1005}+(1+2i-1)^{1005}=(-2i)^{1005}+(2i)^{1005}=(-2)^{1005}\cdot i^{1005}+2^{1005}\cdot i^{1005}=$$

$$=(-2)^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i+2^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i=(-2^{1005})\cdot i+(2^{1005})\cdot i=-2^{1005}\cdot i+2^{1005}\cdot i=0$$

<u>2η λύση:</u>

Είναι:

$$(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=(1-i)^{2010}+\left[i(1-i)\right]^{2010}=$$

$$=(1-i)^{2010}+i^{2010}\cdot(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}\cdot(1+i^{2010})=(1-i)^{2010}\cdot(1-1)=0$$

Β3. Είναι

$|w-4+3i|=|z_1-z_2|=|1-i-1-i|=|-2i|=2$

Έστω $w=x+\psi i$, τότε

$|x+\psi i-4+3i|=2 \Leftrightarrow |(x-4)+(\psi+3)i|=2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(\psi+3)^2=4$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(4,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$.

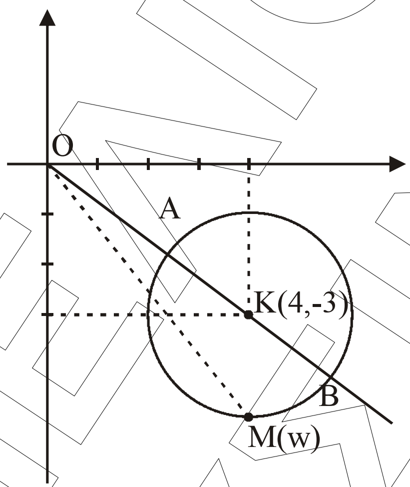
Β4. Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(w)$ από την αρχή $O(0, 0)$, δηλαδή το μήκος (OM). Από τη Γεωμετρία όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B τότε

$$(OA) \le (OM) \le (OB) \quad (1)$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Όμως

- $(OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3 \quad (2)$ και
- $(OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7 \quad (3)$



Επομένως, λόγω των (1), (2) και (3) έχουμε $3 \le |w| \le 7$.

<u>2η λύση:</u>

Γράφουμε :

$|w| = |w + (-4+3i) - (-4+3i)|$

Οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\big||w+(-4+3i)| - |-4+3i|\big| \le |w+(-4+3i) - (-4+3i)| \le |w+(-4+3i)| + |-4+3i|$ ή

$\big||z_1 - z_2| - |-4+3i|\big| \le |w| \le |z_1 - z_2| + |-4+3i|$ ή $|2-5| \le |w| \le 2+5$.

Άρα $3 \le |w| \le 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}.$$

Επειδή $x^2+x+1>0$ καθώς και $x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2(x^2-3x+2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2) \qquad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.
Επομένως από την (1) προκύπτει
$x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$. Άρα $x=1$ ή $x=2$.

Γ3. Είναι $f''(x) = \left(2+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = 2\dfrac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= 2\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$, ενώ είναι $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$ και $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Έτσι η C_f έχει σημεία καμπής στα σημεία με τετμημένες $x_1=-1,\ x_2=1$.

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_1=-1$ έχει εξίσωση (ε_1):

  $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y-(-2+\ln 2) = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x+\ln 2 - 1$

  Για $x=0$ προκύπτει $y=\ln 2 - 1$

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_2 = 1$ έχει εξίσωση (ε_2):

  $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - (2 + \ln 2) = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$

  Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$.

  Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0,\ \ln 2 - 1)$ του άξονα $y'y$.

Γ4. $$\int_{-1}^{1} x\,f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x\ln(x^2+1))\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\ln(x^2+1)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\left[\ln(x^2+1)\right]'\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\frac{2x}{(x^2+1)}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(1-1) = \frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $\varphi(t) = \dfrac{t}{f(t) - t}$ είναι

α) ορισμένη σε όλο το $\Re$ αφού $f(t) \neq t$ για κάθε $t \in \Re$ και

β) συνεχής σε όλο το $\Re$, ως πηλίκο συνεχών.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + x + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με

$$f'(x) = \varphi(x) + 1 = \frac{x}{f(x)-x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x)-x},\ x \in \Re.$$

Δ2. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x) = \left[\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x)\right]' = 2f(x)\cdot f'(x) - 2f(x) - 2x\cdot f'(x) =$$

$$= 2f'(x)\left(f(x) - x\right) - 2f(x) \overset{(\Delta 1)}{=} 2\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x)-x\right) - 2f(x) = 0,\ x \in \Re.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $\Re$.

Δ3. Είναι: $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \dfrac{t}{f(t)-t}\mathrm{d}t = 3$.

Λόγω του **Δ2** είναι $g(x) = c,\ c \in \Re$, για κάθε $x \in \Re$, άρα $\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) = c,$ για κάθε $x \in \Re$.

Για $x = 0$ προκύπτει $c = \left(f(0)\right)^2 - 2\cdot 0\cdot f(0) = 9$.

Έτσι $\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$\left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 9.$ (1)

Αν θέσουμε $h(x) = f(x) - x$, έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\Re$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, αφού $f(x) \neq x$, $x \in \Re$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$, δηλαδή είναι
ή $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ ή $h(x) < 0$ για κάθε $x \in \Re$.

Όμως $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ άρα

$h(x) > 0$, $x \in \Re$ και $f(x) > x$, $x \in \Re$. (2).

Από την (1) προκύπτει ότι

$$\left|f(x) - x\right| = \sqrt{x^2+9} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x) - x = \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+9},\ x \in \Re.$$

Δ4. Έστω $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t,\ x \in \Re$.

Είναι $F(x) = \int_c^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^{x} f(t)\mathrm{d}t,\ x \in \Re,\ c \in \Re$.

και $F'(x) = f(x+1) - f(x),\ x \in \Re$. (1)

Όμως $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \dfrac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0,\quad x \in \Re$.

Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Προκύπτει έτσι: $x < x+1 \Rightarrow f(x) < f(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) > 0,\ x \in \Re$. (2)

Λόγω των (1), (2) η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Επομένως: $x < x+1 \Leftrightarrow F(x) < F(x+1) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$.

<u>2η λύση:</u>

Η $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ είναι μια αρχική της f στο $\Re$ και η προς απόδειξη ανισότητα

γράφεται

$$F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1) \Leftrightarrow \frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} < \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, x + 1]$ και $[x + 1, x + 2]$ προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x_1, x_1 + 1)$ και $\xi_2 \in (x + 1, x + 2)$ ώστε

$$\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F'(\xi_1) = f(\xi_1) \text{ και } \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = F'(\xi_2) = f(\xi_2).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ή ισοδύναμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι:

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \Re$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$.