ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ο ζητούμενος αριθμητικός μέσος είναι:

$$\frac{\left(t_1-\bar{x}\right)+\left(t_2-\bar{x}\right)+...\left(t_\nu-\bar{x}\right)}{\nu}=\frac{(t_1+t_2+...+t_\nu)-\left(\nu\bar{x}\right)}{\nu}=\frac{t_1+t_2+...t_\nu}{\nu}-\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}=0\,.$$

Α2. Θεωρία σελίδα 86, 87, σχολικό βιβλίο.

Α3. Θεωρία σελ. 140, σχολικό βιβλίο.
Βέβαιο είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντα και τέτοιο είναι το σύνολο Ω.
Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ και τέτοιο είναι το κενό σύνολο $\varnothing$.

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Λ	Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x\neq 1$ είναι:

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1}=\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}=\frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=$$

$$\frac{2(x^2-x)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=1$.

Β2. Είναι

$$f'(x)=(2\sqrt{x^2-x+1}-1)'=2\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}(x^2-x+1)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\cdot(2x-1)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι:

$$f'(0)=\frac{2\cdot 0-1}{\sqrt{0^2-0+1}}=-1.$$

Β3. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ τότε είναι: εφ$\omega=f'(0)=-1$, και επειδή $0\leq\omega<\pi$, προκύπτει $\omega=\frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν το πλάτος κάθε κλάσης είναι c, τότε οι δύο πρώτες κλάσεις είναι $[0, c)$ και $[c, 2c)$. Αφού το κέντρο της $2^{ης}$ κλάσης δίνεται ότι είναι 6, προκύπτει $\frac{c+2c}{2}=6 \Leftrightarrow c=4$.

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ X_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0, 4)	2	20
[4, 8)	6	40
[8, 12)	10	45
[12, 16)	14	30
[16, 20)	18	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

$$\bar{x}=\frac{1}{160}\sum_{i=1}^{5}\nu_i x_i=\frac{1}{160}(2\cdot 20+6\cdot 40+10\cdot 45+14\cdot 30+18\cdot 25)=\frac{1600}{160}=10 \text{ κιλά}.$$

$$s^2=\frac{1}{160}\sum_{i=1}^{5}\nu_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{160}\left[20(2-10)^2+40(6-10)^2+45(10-10)^2+30(14-10)^2+25(18-10)^2\right]$$

$$=\frac{1}{160}\cdot 4000=25.$$ Άρα $s=5$ κιλά.

Γ3. Είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{5}{10}=50\% >10\%$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. $$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\nu_2+\nu_3+\frac{1}{2}\nu_4}{160}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 40+45+\frac{1}{2}\cdot 30}{160}=\frac{70}{160}=\frac{7}{16}.$$

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης s στο **Γ2** ερώτημα θα μπορούσε εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί και ο τύπος που δίνεται ως εξής:

$$s^2=\frac{1}{160}\sum_{i=1}^{5}x_i^2\nu_i-\left(\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{160}\right)^2=\frac{1}{160}(20000)-(\bar{x})^2=125-100=25.$$ Άρα $s=5$ κιλά.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $$f'(x) = \frac{1}{x-P(A)} - (x-P(A) = \frac{1-\left(x-P(A)\right)^2}{x-P(A)} = \frac{(1-x+P(A))\cdot(1+x-P(A))}{x-P(A)}.$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1 = P(A)+1$ ή $x_2 = P(A)-1$.

Είναι $x_1 > P(A)$ διότι $P(A) + 1 > P(A) \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει,

ενώ $x_2 < P(A)$ διότι $P(A) - 1 < P(A) \Leftrightarrow -1 < 0$, άρα η x_2 απορρίπτεται.

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε:

α) $x > P(A)$ άρα $x - P(A) > 0$

β) $x > P(A)$ άρα $x - P(A) > 0$ και $x - P(A) + 1 > 1 > 0$.

γ) Έτσι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x+P(A) > 0 \Leftrightarrow x < 1+P(A)$ *και* $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ $1-x+P(A) < 0 \Leftrightarrow x > 1+P(A)$.

Έτσι ο πίνακας μεταβολών για την f είναι:

x	P(A)		1+P(A)		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(P(A), 1 + P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1 + P(A), +\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1 + P(A)$ το

$$f\left(1+P(A)\right) = \ln\left(1+P(A)-P(A)\right) - \frac{1}{2}\left(1+P(A)-P(A)\right)^2 + P(B) =$$

$$= \ln 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}.$$

Δ2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 5/3$, από **Δ1** θα είναι:

$1 + P(A) = 5/3 \Leftrightarrow P(A) = 5/3 - 1 \Leftrightarrow P(A) = 2/3$.

Επίσης αφού $f(x_0) = 0$ είναι λόγω του **Δ1**

$$f(1+P(A)) = 0 \Leftrightarrow P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}.$$

Δ3. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B)$.

Όμως $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ άρα

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}.$$

Άρα $P(A\cap B)' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Δ4. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$.

Άρα $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.