

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2010

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ,

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**β)** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

**δ)**  $(\sin x)' = \eta \mu x, \quad x \in \mathbb{R}$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{2}{z} = 2$ , όπου  $z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq 0$ .

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες  $z_1$  και  $z_2$  της εξίσωσης.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 7**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι  $3 \leq |w| \leq 7$ .

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα  $\psi\psi$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$
$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι σταθερή.

**Μονάδες 7**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**