

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2010
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$.

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$.

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

A2. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f'(t_0)$.

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
$[0 - \dots)$	...	20
$[\dots - \dots)$	6	40
$[\dots - \dots)$	...	45
$[\dots - \dots)$	...	30
$[\dots - \dots)$	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4.

Μονάδες 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά ».

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος
$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right]$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα **Δ2** και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5