ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (θεώρημα Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

Α2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2$ (1)

Όμως $|\overline{z}+3i|=|\overline{\overline{z}+3i}|=|z-3i|$ (2)

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ (3).

Αν $z=x+yi$ η (3) γράφεται: $|x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

Οπότε $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\left(\overline{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)\in R.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $x^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.
Και επειδή $x=\mathrm{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1\le \mathrm{Re}(z)\le 1$.
Οπότε: $-2\le 2\mathrm{Re}(z)\le 2$. Άρα $-2\le w\le 2$.

Β4. Είναι: $|z-w|=\left|z-z+3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\overline{z}-3i|=|-\overline{z}|=|z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$
$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1,\ c_1 \in R$$

Για $x = 0$ προκύπτει: $e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1$

και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι $c_1 = -1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2.$$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_2 = 0$.

Έτσι $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$, είναι: $h'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h′	−	0	+
h	↘	1	↗

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ την τιμή $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Δηλαδή $h(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$..

Γ2. Είναι $f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού $h'(x) = e^x - 1$.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

ΘΕΜΕΛΙΟ ΕΠΙΛΥΣΙΝΑ

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ την τιμή $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$.

Γ3. Είναι: $f''(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \dfrac{\left(e^x - 1\right)'\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x - x\right)'}{\left(e^x - x\right)^2} =$

$$= \frac{e^x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)\left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{e^x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right)^2}{\left(e^x - x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{(2 - x)e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$\varphi'(x) = -e^x + (2 - x) \cdot e^x = e^x(1 - x)$
$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$
$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Φ′		+	0	−	
Φ		↗	e − 1	↘	

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e - 1 > 0$.
Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty, +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(2 - x) \cdot e^x - 1\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2 - x) \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - x}{e^{-x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{(2 - x)'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

Έτσι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$.

ΘΕΜΕΛΙΟ ΕΛΕΥΣΙΝΑ

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=\left(-1,e-1\right].$$

$$\varphi\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0\in\varphi\left((-\infty,1]\right)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ ώστε $\varphi(x_1)=0$.

  Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $x < x_1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x_1) < 0$

  Ενώ με $1 > x > x_1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

  Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x - x)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty,1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0\in\varphi\left([1,+\infty]\right)$ άρα υπάρχει $x_2\in[1,+\infty)$, ώστε $\varphi(x_2) = 0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $1 < x < x_2$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

  Ενώ με $x > x_2$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$.

  Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1,+\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2.

Γ4. Θέτουμε $g(x)=\ln(e^x-x)-\text{συν}\,x=f(x)-\text{συν}\,x,\quad x\in\mathbb{R}$.

- Ύπαρξη : Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

  Είναι $g(0)=f(0)-\text{συν}(0)=-1<0$

  $$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\text{συν}\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

  Όμως $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0.$

Έτσι $g(0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f \uparrow$ στο $[0,+\infty)$

$\text{συν}\, x_1 > \text{συν}\, x_2$ διότι $\text{συν}\, x \downarrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\text{συν}\, x_1 < -\text{συν}\, x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2) - \text{συν}\, x_1 < f(x_2) - \text{συν}\, x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

<u>Παρατήρηση (2ος τρόπος για τη μονοτονία):</u>

Η μονοτονία της g στο $[0, \pi/2]$ μπορεί να προκύψει και ως εξής: $g'(x) = f'(x) + \text{ημ}\, x$.

Όμως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα και για κάθε $x \in (0, \pi/2)$,

ενώ επίσης $\text{ημ}\, x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$.

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$ και επομένως g γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi/2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,dt$$

Θέτουμε: $x + t = u \Leftrightarrow t = u - x$. Οπότε: $dt = du$.

Ακόμη για $t = 0$ έχουμε $u = x$ και για $t = -x$ έχουμε $u = 0$.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,\mathrm{d}u=\int_x^0 e^{-2x}\,\frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u=e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x)=-e^{2x}e^{-2x}\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u \Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u$$

Άρα $f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u \quad (1)$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{d}u \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο $[0, x]$ με $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{d}u$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{d}u$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$ και $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$

οπότε $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και $g'(x)f(x)=e^{2x}$

άρα

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\frac{f(x)}{g(x)}=c$

και επειδή $f(0)=g(0) \overset{(1)\&(2)}{=} 1$, θα είναι c = 1.

Άρα $f(x)=g(x)$.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Δ2. Επειδή είναι:

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \quad \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$f^2(x)=e^{2x}+c$

Όμως $f(0)=1$, οπότε $c=0$.

Άρα $f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^2=\left[e^x\right]^2 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=e^x$

Και επειδή $f(x)>0$, προκύπτει ότι $f(x)=e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(De\,L'Hospital)\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{-1}{x}}=-\infty.$$

(*): Θέτουμε $\frac{1}{x}=y$ οπότε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to -\infty}\frac{e^{-y}}{y}:\frac{+\infty}{-\infty}$.

Δ4. Είναι $F'(x)=f(x^2)>0$. Άρα η $F\uparrow$ στο $[0,1]$.

Άρα για $0\le x\le 1$ θα είναι $F(x)\le F(1)$ και επειδή $F(1)=0$, προκύπτει ότι $F(x)\le 0$ $\forall\, x\in[0,1]$.

Επομένως $\forall\, x\in[0,1]$, θα είναι:

$$E=-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x'F(x)\mathrm{d}x=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)\mathrm{d}x=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t^2)\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\ \text{τ.μ.}$$

ΟΜΙΛΟΣ ΕΛΛΕΝΙΝΑ