

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σελ. 152 σχολικού βιβλίου.
- A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου. Δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \emptyset$.
- A3.** Θεωρία, σελ. 65 σχολικού βιβλίου. Η σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i ενός δείγματος, προκύπτει από το λόγο $f_i = \frac{v_i}{n}$, όπου v_i είναι η συχνότητα της τιμής x_i προς το μέγεθος n του δείγματος. Έτσι, αν πολλαπλασιαστεί επί 100 εκφράζει την ποσοστιαία εμφάνιση της τιμής x_i , σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος n .
- A4.** α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Έστω $N(A)$, $N(K)$, $N(M)$ τα πλήθη αντίστοιχα των άσπρων (A), κόκκινων (K) και μαύρων (M) σφαιρών. Επειδή $P(M) = \frac{1}{4}$, θα είναι: $\frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4 \cdot N(M)$.
Αφού $64 < N(\Omega) < 72$ έπεται $64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$.
Αφού $N(M)$ είναι φυσικός αριθμός, προκύπτει $N(M) = 17$.
Άρα $N(\Omega) = 4 \cdot 17 = 68$.

- B2.** Είναι $A \cup K \cup M = \Omega$, άρα $P(A \cup K \cup M) = P(\Omega) = 1$ (1),
με $A \cap M = \emptyset$, $A \cap K = \emptyset$, $M \cap K = \emptyset$, δηλαδή τα A, K, M , είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

Έτσι η (1) γράφεται $P(A) + P(K) + P(M) = 1$.

Προκύπτει έτσι $\frac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = \frac{1}{4}$.

- Για $\lambda = 1$ προκύπτει $P(A) = 4$, οπότε η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται διότι $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Για $\lambda = \frac{1}{4}$ προκύπτει $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(K) = \frac{1}{2}$, $P(M) = \frac{1}{4}$. Άρα η τιμή $\lambda = \frac{1}{4}$ είναι η ζητούμενη.

B3. $P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M) = \frac{1}{4} \cdot N(\Omega) = \frac{1}{4} \cdot 68 = 17.$

Επίσης, $P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A) = \frac{1}{4} \cdot N(\Omega) = \frac{1}{4} \cdot 68 = 17.$

$P'(K) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(K) = \frac{1}{2} N(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 68 = 34.$

B4. Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί άσπρη σφαίρα και M το ενδεχόμενο να επιλεγεί μαύρη σφαίρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup M$. Επειδή τα A, M είναι ασυμβίβαστα, είναι: $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $\bar{x} = \sum_{i=1}^7 x_i f_i = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot \frac{y_A}{100} + 16 \cdot \frac{y_E}{100} + 18 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0$

Επειδή είναι $\bar{x} = 14,2$ και $y_A = y_E$ έπεται

$$14,2 = 1 + 2,4 + 30 \frac{y_A}{100} + 1,8 \Leftrightarrow 14,2 - 5,2 = 30 y_A \Leftrightarrow \frac{y_A}{100} = \frac{9}{30}.$$

Άρα: $y_A = y_E = 30$

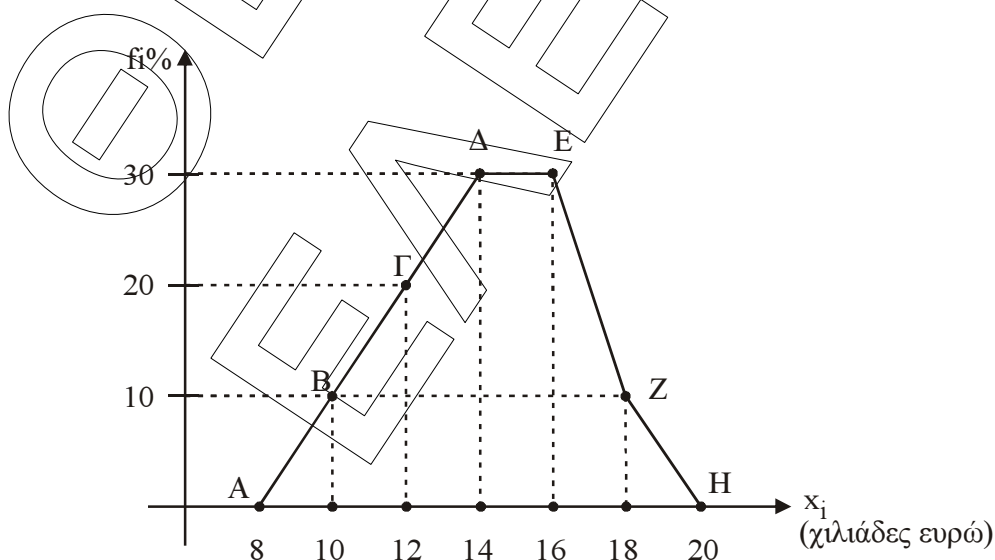
2ος τρόπος:

Επειδή $y_A + y_E = 60$

και $DE \parallel x'x$ είναι $y_A = y_E.$

Έτσι προκύπτει $y_A = y_E = 30.$

Γ2. Είναι:



Γ3. Είναι:

[-)	x_i	f_i %
9 - 11	10	10
11 - 13	12	20
13 - 15	14	30
15 - 17	16	30
17 - 19	18	10
Σύνολο		100

Γ4. Σύμφωνα με τον πίνακα του ερωτήματος Γ3, το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το επιπλέον εφάπαξ ποσό είναι 40%.

Γ5. Είναι $n = 80$, διότι το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο συχνότητας και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το πλήθος n των μετρήσεων. Έτσι ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό, που αναφέρεται στο ερώτημα Γ4, είναι: $80 \cdot 40\% = 32$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left[e^{\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}} \right]' = e^{\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}} \left[\frac{1}{3} \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) \right]' =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}} \left[\frac{1}{3} \left(2x - \frac{11}{10} \right) \right] = e^{\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}} \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right) = 0 \Leftrightarrow (\text{αφού } e^{\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

$$x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2}{5}.$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	$1/3$	$2/5$	$+\infty$	
f'	+	○	-	○	+
f					

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$,
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$.

Δ2. Η f σύμφωνα με το Δ1 παρουσιάζει:

- τ. μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{3}$
- τ. ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{2}{5}$.

Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \leq P(B)$, οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Ακόμα, επειδή $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Οπότε:

- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Δ3.

$$\begin{aligned}
 \text{α)} \quad f(x) = h(x) &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})} = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{5}x \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow 5x \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) = 3x \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 5x \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5} \right) - 3x \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \left(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5x}{2} + 3 \right) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3.
 \end{aligned}$$

β) Είναι:

- $v_1 = 2 \cdot x_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$
- $v_2 = 2 \cdot x_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$
- $v_3 = 2 \cdot x_3 + 2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων:

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
$x_1 = 0$	$v_1 = 1$	0
$x_2 = 2$	$v_2 = 5$	10
$x_3 = 3$	$v_3 = 7$	21
	$v = 13$	

$$\text{Άρα } \bar{x} = \frac{0+10+21}{13} = \frac{31}{13}.$$