

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

**A2.** Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου  $A$ .

Μονάδες 4

**A3.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $X$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ,

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

**β)** Η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς  $x$ , όταν  $x = x_0$  (μονάδες 2).

**γ)** Αν  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , τότε ισχύει ότι  $P(A) > P(B)$  (μονάδες 2).

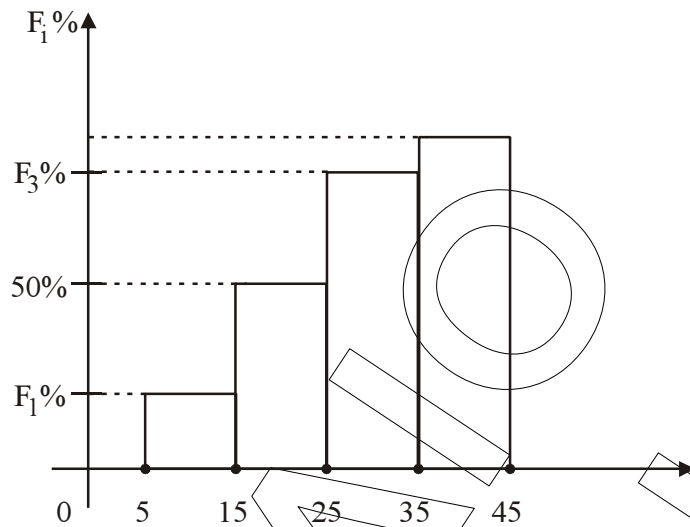
**δ)** Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

**ε)**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2).

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα  $[5, 45]$  και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



**B1.** Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

**Μονάδες 4**

**B2.** Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι  $\alpha = 8$  (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	$x_i$	$v_i$	$f_i \%$	$N_i$	$F_i \%$
$[5, )$		$\alpha + 4$			
$[ , )$		$3\alpha - 6$			
$[ , )$		$2\alpha + 8$			
$[ , 45)$		$\alpha - 2$			
Σύνολο					

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{x}$  και η τυπική απόκλιση  $s$  των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι:  $\sqrt{84} \approx 9,17$ )

**Μονάδες 8**

**B4.** Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν  $v$  φυσικός αριθμός με  $v \geq 3$ , τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι  $\frac{3v}{v^2 + 1}$

- Ισπανικά είναι  $\frac{v+2}{v^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι  $\frac{v+1}{v^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $v = 3$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$ ,  $x > 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Έστω  $M(x, f(x))$ ,  $x > 0$  σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ . Η παράλληλη ευθεία από το  $M$  προς τον άξονα  $y'y$  τέμνει τον ημιάξονα  $Ox$  στο σημείο  $K(x, 0)$  και η παράλληλη ευθεία από το  $M$  προς τον άξονα  $x'x$  τέμνει τον ημιάξονα  $Oy$  στο σημείο  $L(0, f(x))$ . Αν  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου  $OKML$  γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Έστω η ευθεία  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ ,  $\beta \neq 10$ , η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $\Sigma(1, f(1))$ . Θεωρούμε δέκα σημεία  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  της ευθείας  $\varepsilon$ , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους  $x_i$  να έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 10$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ .

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\beta$  το δείγμα των τεταγμένων  $y_i$  των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Αν  $A$  και  $B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε  $A \neq \emptyset$  και  $A \cap B \neq \emptyset$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

**Μονάδες 5**