

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28
A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14
A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87
A4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(\omega_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x=1$, ισούται με $f'(1)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3} \ln x \right)' = \left(\frac{x}{3} \right)' \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3}.$$

Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$f'(1) = \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- B2. Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Επειδή $\{\omega_3\} \subseteq A'$ είναι $P(\omega_3) \leq P(A')$. Όμως $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

$$\text{οπότε } \frac{1}{3} \leq P(A'). \quad P(A') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \geq \frac{1}{4}.$$

Πράγματι, $\{\omega_1\} \subseteq A$ άρα $P(\omega_1) \leq P(A)$. Όμως $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, άρα $P(A) \geq \frac{1}{4}$.

B3.

$$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}.$$

Όμως $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$ και επειδή $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

προκύπτει $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$.

Είναι $P(\Omega) = 1$, άρα $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

και επειδή $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_4) = 0$ προκύπτει

$$P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}.$$

Τα $A - B$, $B - A$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, άρα

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, άρα $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$.

$B = \{\omega_1, \omega_3\}$, άρα $P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

$A \cap B = \{\omega_1\}$, άρα $P(A \cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$.

Από την (1) βρίσκουμε ότι:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

β' τρόπος: $A - B = \{\omega_4\}$, $B - A = \{\omega_3\}$ άρα

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(\{\omega_3\} \cup \{\omega_4\}) = \\ &= P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') = P(A') - P[(A \cup B)'] = 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = \\ &= P(A \cup B) - P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) = \\ &= P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

β' τρόπος: Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$
οπότε $A' - B' = \{\omega_3\}$. Άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = 1/3$.

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1. Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι $[50 + 3c, 50 + 4c)$.
Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι

$$\frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 50 + \frac{7c}{2} = 85 \Leftrightarrow \frac{7c}{2} = 35 \Leftrightarrow c = 10.$$

- Γ2. Αφού η διάμεσος είναι $\delta = 75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0,5$.

Επίσης, $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$. Επίσης ισχύουν $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ καθώς και $f_4 = 2f_3$ άρα,

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0,5$$

$$55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$$

$$f_4 = 2f_3$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $f_1 = 0,1, f_2 = 0,3, f_3 = 0,2, f_4 = 0,4$.
Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	x_i	f_i
$[50, 60)$	55	0,1
$[60, 70)$	65	0,3
$[70, 80)$	75	0,2
$[80, 90)$	85	0,4
Σύνολο		1

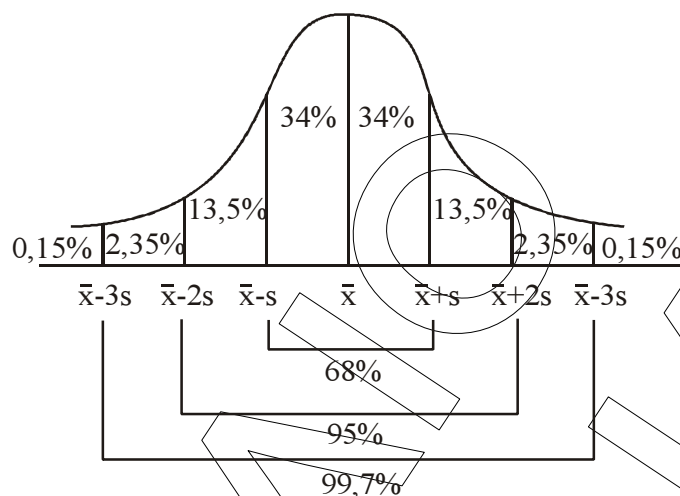
- Γ3. Έχουμε $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 74n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 x_i v_i + x_4 v_4 = 74n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 x_i v_i = 74n - x_4 v_4 \quad (1)$$

Επομένως η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i v_i}{v_1 + v_2 + v_3} \stackrel{(1)}{=} \frac{74n - x_4 v_4}{n - v_4} = \frac{74 - x_4 f_4}{1 - f_4} = \frac{74 - 85 \cdot 0,4}{1 - 0,4} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Αφού η κατανομή είναι κανονική



και το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\bar{x} + 2s = 74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι θα είναι $\bar{x} - s = 68$, όπου $\bar{x}, s$ η μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των k παρατηρήσεων.

Άρα θα είναι $\bar{x} + 2s = 74$, $\bar{x} - s = 68$.

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\delta = 2$ και $\bar{x} = 70$.

Ο συντελεστής μεταβολής των k παρατηρήσεων είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} < \frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1, x > 0$

Η εφαπτόμενη της f στο στο σημείο $(1, f(1))$ είναι:

(ε): $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(1) = 1$.

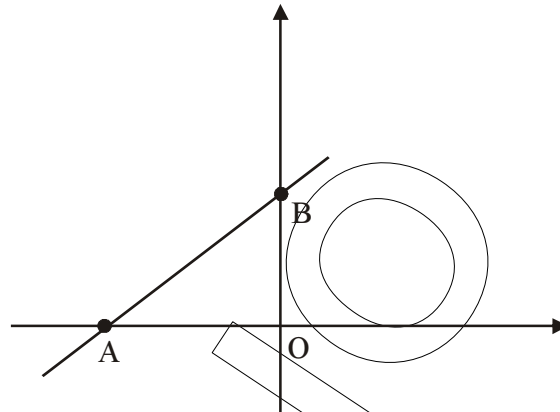
Επειδή η (ε) διέρχεται από το $(1, f(1))$ αλλά

$f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(1) - 1 = 1 \ln 1 + \kappa - 1 = \kappa - 1$

η (ε) γίνεται $y = x + \kappa - 1$.

Τα σημεία A, B στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $A(1-\kappa, 0)$ και $B(0, \kappa-1)$ αντίστοιχα.

Το τρίγωνο OAB έτσι έχει εμβαδόν: $E = \frac{1}{2}(OA)(OB)$ άρα



$$E = \frac{|1-\kappa| \cdot |\kappa-1|}{2} = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$$

$$\text{Δίνεται } E < 2, \text{ άρα } \frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow |\kappa-1|^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \kappa-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$$

Όμως κ ακέραιος με $\kappa > 1$, άρα $\kappa = 2$.

Δ2.

α) Επειδή $\kappa = 2$ η (ε) γίνεται $y = x + 1$

Επίσης από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι:

$$y = x + 1 \Leftrightarrow 31 = x + 1 \Leftrightarrow x = 30.$$

β) Είναι $31 = \frac{(x_1 + 3) + \dots + (x_{20} + 3) + x_{21} + \dots + x_{35} + (x_{36} - \lambda) + \dots + (x_{50} - \lambda)}{50} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda = 31 \cdot 50 \Leftrightarrow 30 \cdot 50 + 60 - 15\lambda = 30 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 - 15\lambda = 0 \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3.

Είναι $f'(x) = \ln x + 1, x > 0$.

Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0	1/e	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)			

Προκύπτει $\min f : f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} = \frac{2e-1}{e} > 0$

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e).$$

Επειδή $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ προκύπτει: $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$.

$$\text{Έτσι } R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2.$$

Από τη δοσμένη σχέση $a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \ln(a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) &= \ln e^7 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7 \\ \Leftrightarrow f(\alpha) - 2 + f(\beta) - 2 + f(\gamma) - 2 &= 7 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι: } \bar{x} &= \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} = \\ &= \frac{13 + e + 2}{5} = \frac{15 + e}{5}. \end{aligned}$$

Δ4. α) Για το ενδεχόμενο Α έχουμε:

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}.$$

$$\text{Άρα } A = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{30}\}.$$

$$N(A) = 20 \text{ άρα } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:

$$f(t) > f(t') + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > 1 + \ln t + 1 \Leftrightarrow (t-1) \ln t > 0.$$

$$\text{Άρα } \{t-1 < 0 \text{ και } \ln t < 0\} \text{ ή } \{t-1 > 0 \text{ και } \ln t > 0\}$$

Η δεύτερη περίπτωση δεν μπορεί να ισχύει διότι $t \in \Omega$, άρα $t < 1$.

$$\text{Άρα } 0 < t < 1, \text{ άρα } B = \{t_1, t_2, t_{13}, \dots, t_{29}\}.$$

$$\text{Έτσι } A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{29}\} \text{ και άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}.$$