

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, σελίδα 194 σχολικού βιβλίου.
A2. Θεωρία, σελίδα 188 σχολικού βιβλίου.
A3. Θεωρία, σελίδα 259 σχολικού βιβλίου.
A4. α) $\rightarrow \Lambda$, β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Lambda$, δ) $\rightarrow \Sigma$, ε) $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$\begin{aligned}
 |(x-4) + yi| &= 2|(x-1) + yi| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2] \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow \\
 &3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2.
 \end{aligned}$$

Δηλαδή προκύπτει κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

(β' τρόπος) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 |z-4| &= 2 \cdot |z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 2^2 \cdot |z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4) \cdot (\bar{z}-4) = 4 \cdot (z-1) \cdot (\bar{z}-1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - 4 \cdot \bar{z} - 4z + 16 = 4 \cdot (z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1) \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + 16 = 4z \cdot \bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z \cdot \bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |z| = 2.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

B2. α) Ο w είναι πραγματικός, αν και μόνο αν, είναι $\bar{w} = w$.

Πράγματι

$$\begin{aligned}
 \bar{w} = w &\Leftrightarrow \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow \frac{(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2)}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(z_1^2 + z_2^2)}{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \bar{z}_1^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_2^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (z_1 \bar{z}_1) \bar{z}_1 \cdot z_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_1 \cdot \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) z_1 \cdot \bar{z}_2 + (z_2 \bar{z}_2) z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |z_1|^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_2|^2 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4\bar{z}_1 \cdot z_2 + 4z_1 \bar{z}_2 = 4z_1 \cdot \bar{z}_2 + 4z_2 \bar{z}_1 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ αληθές.}
 \end{aligned}$$

Άρα $\bar{w} = w$ και $w \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|w| \leq 4$.

Πράγματι:

$$|w| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 4 \Leftrightarrow \left| \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8.$$

Η τελευταία ισχύει διότι:

$$|z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1^2| + |z_2^2| \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow |z_1^2 + z_2^2| \leq 8.$$

B3. Αν $w = -4$ είναι

$$\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0.$$

Από τη σχέση $(z_1 + z_2)^2 = 0$ προκύπτει $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$.

$$|z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1| \cdot |2i - 1| = 2 \cdot |-1 + 2i| = 2\sqrt{5}.$$

$$|z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1| \cdot |2i + 1| = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

Προκύπτει $|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \Leftrightarrow (ΑΓ) = (ΒΓ)$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}.$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών για την f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f			

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών θα είναι το διάστημα

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0, +\infty)$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2)$. Όμως η f ως γνησίως αύξουσα είναι και 1-1. Άρα

ισοδύναμα γράφεται: $e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$. Όμως η τιμή $\frac{e^3}{2}$

ανήκει στο σύνολο τιμών της f , η οποία είναι και γνησίως αύξουσα. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$. Δηλαδή, η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad \text{με } h'(x) = f(x).$$

Η σχέση $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x)$ με $x > 0$, γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt < 2x f(4x) &\Leftrightarrow \int_1^{4x} f(t) dt - \int_1^{2x} f(t) dt < 2x f(4x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} < f(4x). \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[2x, 4x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε

$$\frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = h'(\xi) \Leftrightarrow \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = f(\xi).$$

Έτσι αρκεί ναδειχθεί ότι $f(\xi) < f(4x)$ με $2x < \xi < 4x$, που όμως ισχύει διότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι:

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$g(x) = \frac{\int_{2x}^1 f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{-\int_1^{2x} f(t) dt + \int_1^{4x} f(t) dt}{x} = \frac{-h(2x) + h(4x)}{x}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(4x) - h(2x)}{x} \stackrel{(\theta)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4h'(4x) - 2h'(2x)}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (4f(4x) - 2f(2x)) = 4f(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2.$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$).

Άρα η g είναι συνεχής στο 0.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{h(4x) - h(2x)}{x} \right)' = \left(\frac{h(4x)}{x} \right)' - \left(\frac{h(2x)}{x} \right)' = \\ &= \frac{(h(4x))' \cdot x - h(4x) \cdot x'}{x^2} - \frac{(h(2x))' \cdot x - h(2x) \cdot x'}{x^2} = \\ &= \frac{4f(4x) \cdot x - h(4x) - 2f(2x) \cdot x + h(2x)}{x^2} = \\ &= \frac{[2xf(4x) - 2xf(2x)] + 2xf(4x) - [h(4x) - h(2x)]}{x^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{f(4x) - f(2x)}{x} + \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}. \end{aligned}$$

Όμως $4x > 2x$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(4x) > f(2x) \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0$

και λόγω του Γ_3 είναι $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt > 0$.

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, όποτε (λόγω της συνέχειας στο 0), η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot e^{f(x)} + f'(x) \cdot e^{-f(x)} &= 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} &= 2x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι: $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c$ και επειδή $f(0) = 0$, προκύπτει $c = 0$.

$$\text{Άρα } e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 1 = 2x \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2x \cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και επειδή η $e^{f(x)} - x$ συνεχής στο \mathbb{R} , προκύπτει ότι η $e^{f(x)} - x$ διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} .

Όμως $e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$.

Άρα $e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. α) Είναι $f'(x) = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' =$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και $f''(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)} = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f(x)	↗		↘

προκύπτει ότι η f είναι: κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

β) Είναι $x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Πράγματι:

(α' τρόπος):

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - f(x)$ στο $[0, 1]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$g'(x) = (x - f(x))' = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

με την ισότητα $g'(x) = 0$ να ισχύει μόνον για $x = 0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Οπότε $g(x) \geq g(0) \quad \forall x \in [0, 1]$. Ομως $g(0) = 0 - f(0) = 0$.

Άρα $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$, άρα $x - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

(β' τρόπος):

Η ανισότητα $x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής:

Επειδή $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, η εφαπτόμενη της C_f στο $[0, +\infty)$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Η f όμως είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται "κάτω" από την εφαπτομένη της $y = x$ στο $O(0, 0)$ για το διάστημα $[0, +\infty)$, άρα και το $[0, 1]$.

Έτσι $f(x) \leq x$ για $x \in [0, 1] \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$ για $x \in [0, 1]$.

Έτσι είναι $E = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx =$
 $= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ (1)

Είναι

- $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}.$

- $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_0^1 x' \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx =$
 $= \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$
 $= \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 =$
 $= \left[\ln(1 + \sqrt{2}) \right] - \left[\sqrt{2} - 1 \right] = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1.$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$E = \frac{1}{2} - (\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. Επειδή $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι $f \uparrow$ στο \mathbb{R} .

Οπότε για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$.

τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln |f(x)|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x) \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot f(x) \cdot \ln f(x)$$

Υπολογίζουμε

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f^2(x)} = \frac{1 \cdot 0}{1} = 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) \ln f(x)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \cdot \ln u) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = -\lim_{n \rightarrow 0^+} u = 0.$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot f(x) \cdot \ln f(x) \right] = 0.$

Δ4. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2) dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t) dt\right)}{(x-2)(x-3)} = 0, \quad x \in (2,3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2) dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t) dt\right)$,

η οποία είναι συνεχής στο $[2, 3]$ με

$$g(2) = -8 + 3\int_0^2 f^2(t) dt \quad \text{και} \quad g(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2) dt.$$

Όμως στο ερώτημα **Δ2** έχει αποδειχθεί ότι $f(x) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$. Επειδή είναι και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει: $f^2(x) \leq x^2$ οπότε και

$$\int_0^2 f^2(x) dx < \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}. \quad \text{Άρα} \quad g(2) < 0.$$

Από την $f(x) \leq x$ τώρα θέτοντας όπου x το x^2 , προκύπτει $f(x^2) \leq x^2$ και έτσι

$$\int_0^1 f(x^2) dx < \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \quad \text{Άρα} \quad g(3) > 0.$$

Συνεπώς $g(2)g(3) < 0$ και έτσι από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση

$$\frac{(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2) dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t) dt\right)}{(x-2)(x-3)} = 0, \quad \text{έχει μία τουλάχιστον λύση}$$

στο διάστημα $(2, 3)$.