Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικης
Γενικής Παιδείας
Γ΄ Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

Α.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:
$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8,5

Α.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=$, $\leq$, $\geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:
α. $P(A') \ldots 1-P(A)$

Μονάδες 2

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \ldots P(A)$.

Μονάδες 2

Β.1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*
Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και Α΄ το αντίθετο του ενδεχομένου Α.
α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$.
β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$.

Μονάδες 4

Β.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*
Αν $A \subseteq B$, $P(A) = 1/4$ και $P(B) = 5/12$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:
α. 1/4 **β.** 5/12 **γ.** 2/3 **δ.** 1/6.

Μονάδες 2,5

Β.3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*
Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι:

$$P(A) = 1/3,\ P(B) = 1/4 \text{ και } P(A \cap B) = 1/5.$$

Στήλη Α		Στήλη Β	
α.	$P(A-B)$	**1.**	1/20
β.	$P\left((B-A)'\right)$	**2.**	2/15
γ.	$P\left((A \cap B)'\right)$	**3.**	4/5
		4.	1/12
		5.	19/20

Μονάδες 6

<u>Απάντηση:</u>

Α.1. Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B) \cup (A \cap B) = A$
Έχουμε:

$$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

Άρα:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

A.2. **α.** $P(A') = 1 - P(A)$
β. $A \subseteq B$ τότε: $P(B) \geq P(A)$

B.1. **α.**
Αφού

$$A' \subseteq B \Rightarrow P(A') \leq P(B) \Rightarrow 1 - P(A) \leq P(B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B) + P(A) \geq 1$$

Άρα:

α. Λάθος

β.
Επειδή:

$$P(A) = P(A') \Rightarrow$$
$$P(A) = 1 - P(A) \Rightarrow$$
$$2P(A) = 1 \Rightarrow$$
$$2P(A) = P(\Omega)$$

Άρα:

β. Σωστό

B.2. Αφού:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

οπότε:

$$P(A \cap B) = P(A) = 1/4$$

Επομένως:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/4 + 5/12 - 1/4 = 5/12$$

Άρα:

β. Σωστό

B.3.

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 1/3 - 1/5 = 2/15$
- $P((B - A)') = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] =$
  $= 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 1/4 + 1/5 = 3/4 + 1/5 = 19/20$
- $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 1/5 = 4/5$

Άρα:

α. $\leftrightarrow$ 2
β. $\leftrightarrow$ 5
γ. $\leftrightarrow$ 3

Ζήτημα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = συνx+ημx$.
A. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

Μονάδες 8

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0,1).

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in IR$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Μονάδες 9

<u>Απάντηση:</u>

A. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές στο R με:

$$f'(x) = (συν\,x + ημ\,x)' = -ημ\,x + συν\,x.$$
$$f''(x) = (-ημ\,x + συν\,x)' = -συν\,x - ημ\,x$$

Άρα:

$$f(x) + f''(x) = \sigma\upsilon\nu\, x + \eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu\, x - \eta\mu\, x = 0.$$

Β. Έστω ψ = α x + β η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α (0,1).

Τότε θα είναι:

$f'(0) = \alpha$ και
$1 = \beta$.

Όμως
$f'(x) = -\eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x$, οπότε:

$f'(0) = -\eta\mu\, 0 + \sigma\upsilon\nu\, 0 = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:
$y = x + 1$

Γ. Είναι:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = -1.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1.$$

Επομένως:

$$\lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda - 2\cdot = 2$$

Άρα:

$\lambda = -4$

Ζήτημα 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [–)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

Α. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

Μονάδες 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

Μονάδες 4

<u>Απάντηση:</u>

Α. Επειδή η σχετική συχνότητα f_3 είναι διπλάσια της $f_1 = F_1 = 0,2$

Έχουμε:

$$f_3 = 2\,f_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$$

Ακόμα:

$$F_2 = f_1 + f_2 \Leftrightarrow 0,5 = 0,2 + f_2 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$$

Από την σχέση $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$

Έχουμε:

$$0,2 + 0,3 + 0,4 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_4 = 1 - 0,9 = 0,1$$

Άρα:

$$f_1 = 0,2, \quad f_2 = 0,3, \quad f_3 = 0,4 \text{ και } f_4 = 0,1$$

Άρα:

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0,9 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

Β. Είναι:

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$$

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 80$, οι αντίστοιχες συχνότητες v_i με $i = 1, 2, 3, 4$ είναι:
$v_1 = 80 \cdot 0,2 = 16$
$v_2 = 80 \cdot 0,3 = 24$
$v_3 = 80 \cdot 0,4 = 32$
$v_4 = 80 \cdot 0,1 = 8$
Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

[–)	x_i	v_i	f_i	F_i	$v_i x_i$
45 – 55	50	16	0,2	0,2	50·16 = 800
55 – 65	60	24	0,3	0,5	60·24 = 1440
65 – 75	70	32	0,4	0,9	70·32 = 2240
75 – 85	80	8	0,1	1	80·8 = 640
		v = 80	1		

Άρα:

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4} v_i x_i = \frac{1}{80} \cdot (800 + 1440 + 2240 + 640) =$$

$$= \frac{1}{80} \cdot 5120 = 64$$

Γ.

α. Αν Α είναι το ενδεχόμενο "βάρος μικρότερο από 65 κιλά" τότε η πιθανότητα P(A) είναι:

$$P(A) = \frac{16+24}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

β. Αν Β είναι το ενδεχόμενο "βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών" τότε η πιθανότητα P(B) είναι:

$$P(B) = \frac{24+32}{80} = \frac{56}{80} = \frac{7}{10}$$

Ζήτημα 4ο

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.
Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Α. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Μονάδες 6

Β. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Μονάδες 6

Δ. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

Μονάδες 7

<u>Απάντηση:</u>

Α. Αφού το 50% των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, προκύπτει ότι:

$$\bar{x} = 12.$$

Επειδή το 16% χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά, προκύπτει ότι από 10 έως 12 λεπτά χρειάζεται το (50 – 16)% = 34% = (68/2)% των μαθητών.
Άρα:

$$\bar{x} - s_x = 10 \Leftrightarrow 12 - s_x = 10 \Leftrightarrow s_x = 2$$

Β. Είναι:

$$CV_1 = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$ περίπου 16,6%.

Επειδή 16,6% > 10%, προκύπτει ότι το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ. Έχουμε:

$$\bar{x} = 12$$

$$\bar{x} + s_x = 14$$

$$\bar{x} + 2 \cdot s_x = 16$$

Το ποσοστό των μαθητών που κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά θα είναι:

$$\left(\frac{95-68}{2}\right)\% = 13,5\%$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$40000 \cdot \frac{13,5}{100} = 40 \cdot 13,5 = 540$$

Δ. Αφού η καθυστέρηση για κάθε μαθητή είναι 5 λεπτά έχουμε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολ.βιβλίου ότι:

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\overline{\psi} = \overline{x} + 5 = 12 + 5 = 17$$

Η νέα τυπική απόκλιση είναι:

$$S_\psi = S_x = 2$$

οπότε:

$$CV_2 = \frac{s_\psi}{\overline{\psi}} = \frac{2}{17}$$ περίπου 11,7%.

Άρα η μεταβολή είναι περίπου 5%.