

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.
Μονάδες 8

B. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;
Μονάδες 6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος γ παρατηρήσεων.
Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

Απάντηση:

A. Θεωρία: Παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$, σελ. 28 σχολικού βιβλίου.

B. Ορισμός: σελ. 13 σχολικού βιβλίου.

Γ. Ορισμός: σελ. 87 σχολικού βιβλίου.

Δ. α-Λ
β-Λ
γ-Σ
δ-Σ
ε-Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος
Μονάδες 5

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος
Μονάδες 5

γ. άνδρας και φιλόλογος
Μονάδες 7

δ. άνδρας ή φιλόλογος.
Μονάδες 8

Απάντηση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ : ο καθηγητής είναι γυναίκα

Φ : ο καθηγητής είναι φιλόλογος

- Επειδή το 55% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες, έχουμε ότι:
 $P(\Gamma)=0,55$.
- Επειδή το 40% των καθηγητών του λυκείου είναι φιλόλογοι, έχουμε ότι:
 $P(\Phi)=0,40$.
- Επειδή το 30% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες φιλόλογοι, έχουμε ότι:
 $P(\Phi \cap \Gamma)=P(\Gamma \cap \Phi)=0,30$.

Επομένως:

α. $P(\Gamma \cup \Phi)=P(\Gamma)+P(\Phi)-P(\Gamma \cap \Phi)=0,55+0,40-0,30=0,65$.

β. $P(\Gamma \cap \Phi')=P(\Gamma)-P(\Gamma \cap \Phi)=0,55-0,30=0,25$.

γ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας και φιλόλογος είναι το $\Gamma' \cap \Phi$, άρα:

$$P(\Gamma' \cap \Phi)=P(\Phi)-P(\Gamma \cap \Phi)=0,40-0,30=0,10$$

δ. Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας ή φιλόλογος είναι το $\Gamma' \cup \Phi$, άρα:

$$\begin{aligned} P(\Gamma' \cup \Phi) &= P(\Gamma') + P(\Phi) - P(\Gamma' \cap \Phi) = \\ &= 1 - P(\Gamma) + P(\Phi) - P(\Phi) + P(\Gamma \cap \Phi) = \\ &= 1 - P(\Gamma) + P(\Gamma \cap \Phi) = 1 - 0,55 + 0,30 = 0,75. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3°

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Δίνεται η συνάρτηση

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. \mathbb{R}

β. $(-1, 1)$

γ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

δ. $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Απάντηση:

A. Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \{x-1 \neq 0 \text{ και } x+1 \neq 0\} \Leftrightarrow \{x \neq 1 \text{ και } x \neq -1\}$
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και η σωστή απάντηση είναι η γ .

Β. Η συνάρτηση f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} \right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}.$$

Γ. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+1) \cdot \frac{x}{x^2-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Δ. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$, τότε θα έχουμε
εφω = $f'(0)$

Όμως $f'(0) = -\frac{0^2+1}{(0^2-1)^2} = -1$ και επειδή $0 < \omega < 180^\circ$, προκύπτει $\omega = 135^\circ$.

ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
Μονάδες 6
- β.** Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
Μονάδες 5
- γ.** Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
Μονάδες 8
- δ.** Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.
Μονάδες 6

Απάντηση:

α.

- Η μέση τιμή είναι:

$$\text{Ομάδα Α: } \bar{X}_A = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5.$$

$$\text{Ομάδα Β: } \bar{X}_B = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8.$$

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$\text{Ομάδα Α: } 1, 3, 4, 5, 8, 9. \text{ Επομένως η διάμεσος είναι: } \delta_A = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

$$\text{Ομάδα Β: } 4, 5, 6, 7, 12, 14. \text{ Επομένως η διάμεσος είναι: } \delta_B = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

β. Προκειμένου να συγκρίνουμε τις ομάδες ως προς την ομοιογένεια θα πρέπει να βρούμε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B . Έχουμε:

$$S_A^2 = \frac{1}{6} \cdot [(1-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [(-4)^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} (16 + 9 + 16 + 4 + 1) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 46 = \frac{46}{6} = \frac{23}{3}.$$

οπότε:

$$S_A = \sqrt{\frac{23}{3}}$$

$$S_B^2 = \frac{1}{6} [(7-8)^2 + (14-8)^2 + (6-8)^2 + (4-8)^2 + (12-8)^2 + (5-8)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [(-1)^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 4^2 + (-3)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [1 + 36 + 4 + 16 + 16 + 9] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 82 = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}$$

$$\text{οπότε } S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}.$$

Επομένως,

$$CV_A = CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \sqrt{\frac{23}{75}} \cong \sqrt{0,30}.$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \sqrt{\frac{41}{192}} \cong \sqrt{0,21}.$$

Άρα $CV_A > CV_B$ που σημαίνει ότι είναι περισσότερο ομοιογενής η Ομάδα Β.

Υ.

- Αν y_i με $i = 1,2,3,4,5,6$ είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Α μετά την αύξηση καθemιάς κατά 20%, τότε έχουμε

$$y_i = x_i + \frac{20x_i}{100} = x_i \left(1 + \frac{20}{100} \right) = 1,2x_i.$$

- Αν ω_i με $i = 1,2,3,4,5,6$ είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Β μετά την αύξηση καθemιάς κατά 5 ευρώ, τότε έχουμε
 $\omega_i = x_i + 5.$

Σύμφωνα τώρα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου έχουμε

$$\bar{y} = 1,2 \cdot \bar{x}_A = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ ευρώ και}$$

$$\bar{\omega} = \bar{x}_B + 5 = 8 + 5 = 13 \text{ ευρώ}$$

δ. Έχουμε

- $S_y = |1,2| \cdot S_A = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{23}{3}}.$

- $S_\omega = S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}.$

Επομένως οι συντελεστές μεταβολής των νέων ομάδων είναι αντίστοιχα:

$$CV_A = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{1,2 \cdot S_A}{1,2 \cdot \bar{x}_A} = CV_A \cong \sqrt{0,30}$$

$$CV_B = \frac{S_\omega}{\bar{\omega}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{13} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{507}} \cong \sqrt{0,08}.$$

Συνεπώς $CV_A > CV_B$, που σημαίνει ότι η ομάδα Β' είναι περισσότερο ομοιογενής από την ομάδα Α'.