ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)=c είναι ίση με 0.

Μονάδες 8

Β. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής $\mathbf{x_i}$ μιας μεταβλητής **Χ** είναι αρνητικός αριθμός.

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και **s** η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα $\mathbf{v_i}$ μιας μεταβλητής **Χ** με το μέγεθος **v** του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα $\mathbf{f_i}$ της τιμής $\mathbf{x_i}$.

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα Α και Β συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη Ι** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη ΙΙ** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη Ι		**Στήλη ΙΙ**
α	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β	**1**	$A\cap B$
β	πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β	**2**	Α - Β
γ	πραγματιποιούνται συγχρόνως τα Α και Β	**3**	$(A\cup B)'$
		4	$A\cup B$

Στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύει μία σχέση.

Μονάδες 6

<u>Απάντηση:</u>

Α. Είναι: A_f = R

και f(x+h) - f(x) = c - c = 0.

Οπότε για h ≠ 0 είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

Συνεπώς (c)΄ = 0

Β. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνον αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Γ. α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό

Δ. α. 4 β. 2 γ. 1

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 10

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Μονάδες 15

Απάντηση:

Α. Πρέπει (i) $x\geq 0$ καί
(ii) $\sqrt{x}\neq\sqrt{3}$
δηλ $x\neq 3$

Άρα $A_f=[0,3)\cup(3,+\infty)$.

Β. Για $x\in[0,3)\cup(3,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=$$
$$=\frac{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3}=(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\right]=$
$=(3-1)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 3ο

Στην "Αττική οδό" εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i σε χλμ.	Σχετική συχνότητα f_i %	Αθροιστική Συχνότητα N_i σε χλμ.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i%
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα **(x_i , f_i%)** και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

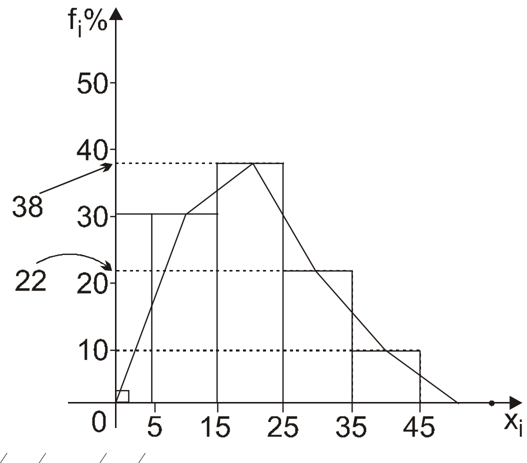
Μονάδες 5

<u>Απάντηση:</u>

Α.

	x_i	v_i	f_i %	N_i	F_i%
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
		200	100		

Β.



Γ.

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i = \frac{10\cdot 60 + 76\cdot 20 + 30\cdot 44 + 40\cdot 20}{200} =$$

$$= \frac{600+1520+1320+800}{200} = \frac{4240}{200} = 21{,}2 \text{ Km}$$

Δ. Είναι $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$ χιλιάδες οχήματα.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

Μονάδες 9

Β. Για τις παραπάνω τιμές των P(A), P(B) καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A \cap B)$
ii. $P(A - B)$
iii. $P[(A \cap B)']$
iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$.

Μονάδες 16

<u>Απάντηση:</u>

Α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' όλο το R ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$

Έτσι έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{1}{2} \right)$$

x	-∞		1/3		1/2		+∞
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			Τ. μεγ.		Τ. ελαχ.		

Επομένως

$P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

Β. Για τις τιμές των $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$ *και* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ βρίσκουμε:

i. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

iii. $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iv. Τα ενδεχόμενα Α-Β, Β-Α είναι ασυμβίβαστα σύμφωνα με την εφαρμογή 2 σελ. 153 σχολ. βιβλίου.

$$P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΕΛΙΟ ΕΛΕΥΣΙΝΑ