ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α.
3ος κανόνας λογισμού των πιθανοτήτων:
Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Για δύο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε
$N(A \cup B) + N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, (1)
αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

Β.
α. Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.
β. Διακριτή ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία παίρνει μόνο μεμονωμένες τιμές.
Συνεχής ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών (α, β).

Γ.
$\alpha \rightarrow \Sigma$
$\beta \rightarrow \Lambda$
$\gamma \rightarrow \Lambda$
$\delta \rightarrow \Lambda$

ΘΕΜΑ 2

α.

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	**Κέντρο κλάσης x_i**	**Συχνότητα ν_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**	**Αθρ.σχετ. συχνότητα F_i**
[4, 8)	6	5	0,1	5	0,1
[8, 12)	10	10	0,2	15	0,3
[12, 16)	14	25	0,5	40	0,8
[16, 20)	18	10	0,2	50	1
Σύνολο		50	1		

β. $\overline{x} = \dfrac{5 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 14 + 10 \cdot 18}{50} = \dfrac{660}{50} = 13{,}2.$

γ. Βαθμό το πολύ μέχρι και 10 έχουν 5 + 5 = 10 μαθητές.

ΘΕΜΑ 3

α. Είναι $\kappa = \lim_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5}\dfrac{3(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x\to 5}\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{5-1} = \dfrac{3}{4}$.

β. Αφού $\kappa = \dfrac{3}{4}$, το σύνολο $X = \left\{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right\}$.

Επειδή $\dfrac{5}{4} > 1$, η τιμή $\dfrac{5}{4}$ αποκλείεται να ισούται με κάποια από τις τιμές

$P(A\cap B)$, $P(B)$. Έτσι $\{P(A\cap B), P(B)\} = \left\{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Ισχύει $A\cap B \subseteq B$ άρα $P(A\cap B) \le P(B)$ και επειδή $P(A\cap B) \neq P(B)$ είναι
$P(A\cap B) < P(B)$.

Άρα $P(A\cap B) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$.

γ.

(1) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Άρα $\dfrac{7}{8} = P(A) + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}$, οπότε $P(A) = \dfrac{5}{8}$.

(2) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι:

$P(A - B) = P(A) - P(A\cap B) = \dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

ΘΕΜΑ 4

α.

<u>1ος τρόπος λύσης</u>:

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο Α(1, 1) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'(1) = -1.$$

Επομένως η εξίσωσή της είναι

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή όμως το σημείο Α(1, 1) ανήκει στην εφαπτομένη, είναι

$$1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -x + 2$.

<u>2ος τρόπος λύσης</u>:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Λ (1, 1) είναι :

$$y - f(1) = f'(1)\,(x-1).$$

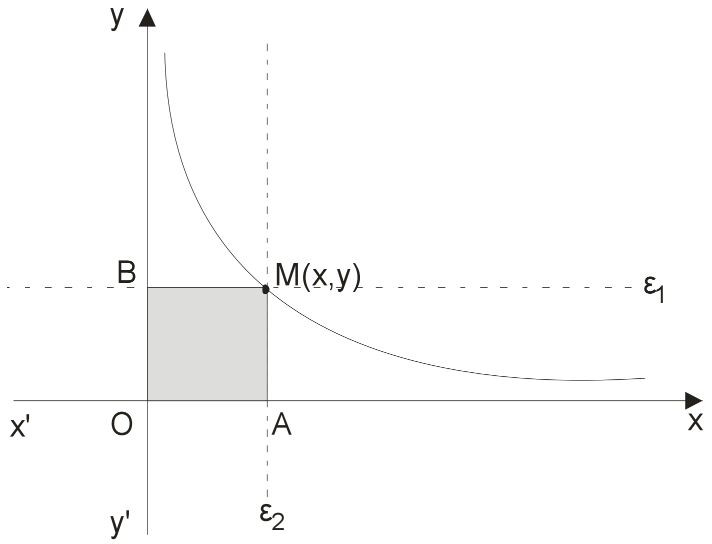
Όμως

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Επομένως

$$y - 1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

β.



Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{1}{x}$ και ε_1, ε_2 οι ευθείες που διέρχονται από το M και είναι παράλληλες αντίστοιχα προς τους άξονες x΄x και y΄y.

Η περίμετρος του σχηματιζόμενου ορθογωνίου παραλληλογράμου ΟΑΜΒ είναι

$$\Pi = 2x + 2y = 2(x + y) \qquad (1)$$

Λόγω της σχέσης $y = \frac{1}{x}$, η (1) γράφεται :

$$\Pi = 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{με} \quad x \in (0, +\infty).$$

Η Π(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\Pi'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\frac{x^2 - 1}{x^2} = 2\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Από την εξίσωση Π΄(x) = 0 έχουμε:

$$2\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = +1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Η τιμή x = -1 απορρίπτεται γιατί $x \in (0, +\infty)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
$\Pi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Pi(x)$		$\searrow$	ελαχ.	$\nearrow$	

$$\Pi(1) = 4$$

Οπότε για την τιμή x = 1, η Π(x) παρουσιάζει ελάχιστο. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(1, 1).

γ. Είναι :

$$\bar{y} = -\bar{x} + 2 = -3 \quad \text{και}$$

$$S_y = |-1| S_x = 2 \,.$$