

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία (Απάντηση στο σχολ. βιβλίο σελ. 152)

B.

α. Θεωρία (Απάντηση στο σχολ. βιβλίο σελ. 22)

β. Θεωρία (Απάντηση στο σχολ. βιβλίο σελ. 87)

Γ1. $\alpha \rightarrow \Sigma$, $\beta \rightarrow \Sigma$, $\gamma \rightarrow \Lambda$

Γ2.

$$f_1'(x) = vx^{v-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_2'(x) = 1/x, \quad x > 0$$

$$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f_4'(x) = -\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} με:

$$f'(x) = (xe^x + 3)' = e^x + xe^x = e^x + f(x) - 3$$

$$\text{διότι } f(x) = xe^x + 3 \Leftrightarrow xe^x = f(x) - 3$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + f(x) - 3 - e^x}{x^2 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + 3 - 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = -1. \text{ (Επειδή η συνάρτηση } g(x) = \frac{e^x}{x-1} \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}$$

$\setminus \{1\}$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων.)

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, είναι

$$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1.$$

$$\text{Έστω } P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5) = \kappa.$$

Τότε

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \kappa, \quad \text{ενώ } P(3) = P(4) = P(5) = \kappa/2.$$

Έτσι είναι

$$\kappa + \kappa + \kappa + \kappa + (\kappa/2) + (\kappa/2) + (\kappa/2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$4\kappa + \frac{3\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow 8\kappa + 3\kappa = 2 \Leftrightarrow 11\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{11}.$$

Άρα

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2/11 \text{ ενώ } P(3) = P(4) = P(5) = 1/11.$$

β. Αφού $A \cap B \subseteq A \Rightarrow \{-1, 3\} \subseteq \{1, 3, x^2 - x - 3\}$

Άρα $-1 \in \{1, 3, x^2 - x - 3\}$.

$$\text{Οπότε } x^2 - x - 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

• Για $x = 2$ το ενδεχόμενο B γράφεται: $B = \{2, 3, 8, -3\}$

Τότε όμως $A \cap B = \{3\} \neq \{-1, 3\}$

Άρα η τιμή $x = 2$ απορρίπτεται.

• Για $x = -1$ το ενδεχόμενο B γράφεται: $B = \{2, 0, -1, 3\}$

Τότε $A \cap B = \{-1, 3\}$ και η τιμή $x = -1$ είναι η ζητούμενη τιμή.

γ. Για $x = -1$ είναι $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 0, -1, 3\}$

Τότε

$$\bullet P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$$

$$\bullet P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$$

$$\bullet P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$$

$$\bullet P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\bullet P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \\ = P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] = \\ = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{7}{11} + \frac{3}{11} = \frac{7}{11}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$$\bar{x}_A = \frac{12 + 18 + t_3 + t_4 + \dots + t_{25}}{25} = \frac{30 + 345}{25} = 15$$

$$\bar{x}_B = \frac{16 + 14 + t_3 + t_4 + \dots + t_{25}}{25} = \frac{30 + 345}{25} = 15$$

β.

$$S_A^2 = \frac{1}{25} [(12-15)^2 + (18-15)^2 + (t_3-15)^2 + \dots + (t_{25}-15)^2]$$

$$S_B^2 = \frac{1}{25} [(16-15)^2 + (14-15)^2 + (t_3-15)^2 + \dots + (t_{25}-15)^2]$$

Έτσι $S_A^2 - S_B^2 = \frac{1}{25} (3^2 + 3^2 - 1^2 - 1^2) = \frac{16}{25}$.

γ.

$$S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{S_A^2}{(\bar{x}_A)^2} - \frac{S_B^2}{(\bar{x}_B)^2} = \frac{16}{25 \cdot 15^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CV_A)^2 - (CV_B)^2 = \frac{16}{25 \cdot 15^2} \Rightarrow \frac{1}{225} - (CV_B)^2 = \frac{16}{25 \cdot 15^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CV_B)^2 = \frac{1}{225} - \frac{16}{25 \cdot 225} \Rightarrow (CV_B)^2 = \frac{1}{225} \left(1 - \frac{16}{25}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CV_B)^2 = \frac{9}{225 \cdot 25} \Rightarrow CV_B = \frac{3}{15 \cdot 5} \Rightarrow CV_B = \frac{1}{25}$$