

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία: (Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$). Σελ. 28 σχολ. βιβλίο.

B. Θεωρία: Σελ. 96 σχολ. βιβλίο.

Γ.

α - Λ

β - Λ

γ - Σ

δ - Σ

ε - Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x-1}{e^x} = \frac{1}{x+1}$

Έτσι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

β. Είναι $f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x} \right)' = \frac{(x-1)'e^x - (x-1)(e^x)'}{e^{2x}} =$
 $= \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$

Έτσι: $e^x f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x$.

γ. Επειδή $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτουν:

i) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

ii) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

iii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$

Δηλαδή έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	○	-
f		$\frac{1}{e^2}$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, ενώ $f'(2) = 0$.

Άρα η f έχει μέγιστο για $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\bar{x}_A = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = \frac{110}{5} = 22$

$\bar{x}_B = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = \frac{120}{5} = 24$

β. Κατά μέσο όρο μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει $\frac{38}{22} = \frac{19}{11}$ ευρώ / χίλιες ώρες, ενώ

μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ ευρώ / χίλιες ώρες

Επειδή $\frac{5}{3} < \frac{19}{11}$ συμφέρει να αγοραστεί μπαταρία τύπου Β.

γ. $S_A^2 = \frac{1}{5} [(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2] =$

$= \frac{1}{5} [(-2)^2 + (4)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2] =$

$= \frac{1}{5} (4 + 16 + 4 + 16) = \frac{40}{5} = 8$

οπότε

$S_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$S_B^2 = \frac{1}{5} [(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2] =$

$= \frac{1}{5} [(2)^2 + 8^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + 1^2] =$

$= \frac{1}{5} (4 + 64 + 25 + 16 + 1) = \frac{110}{5} = 22$

οπότε

$$S_B = \sqrt{22} = \sqrt{2}\sqrt{11}$$

$$\delta. \quad CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}.$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24}.$$

Είναι $CV_B > CV_A$ διότι $\frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{24} > \frac{1}{11} \Leftrightarrow 11\sqrt{11} > 24$, που ισχύει επειδή $\sqrt{11} \cong 3,3$ και $11 \cdot 3,3 > 24 \Leftrightarrow 36,3 > 24$.

Άρα το δείγμα A παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια ζωής σε σχέση με το δείγμα B.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω A το ενδεχόμενο οι κάτοικοι της πόλης να διαβάζουν την εφημερίδα α και B το ενδεχόμενο να διαβάζουν την εφημερίδα β.

Τότε από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $P(A) = 0,5$, $P(A - B) = 0,3$.

α. Ζητείται η $P(A' \cup B)$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως } P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] = 1 - P(A - B) = 1 - 0,3 = 0,7 = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

β. Επειδή $B \subseteq A' \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A' \cup B) \Rightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}$.

Επίσης από $P(A - B) = 0,3$ έχουμε:

$$P(A) - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow 0,5 - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Όμως } A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \frac{1}{5} \leq P(B).$$

γ. Είναι $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$.

Η f' είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1 - 12 \cdot P(B)$.

Επειδή $P(B) \geq \frac{1}{5}$ έπεται $-12P(B) \leq -\frac{12}{5}$ και $1 - 12P(B) \leq 1 - \frac{12}{5} = -\frac{7}{5} < 0$

Αφού $\Delta < 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} και επομένως δεν έχει ακρότατα.