ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σελίδα 150 σχολ. βιβλίο.

Β. Θεωρία, σελίδα 65 σχολ. βιβλίο.

Γ. α $\to$ Λ, **β** $\to$ Σ, **γ** $\to$ Λ, **δ** $\to$ Σ, **ε** $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i / \nu \Rightarrow \bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4}{\nu} \Rightarrow 4 = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot \nu_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + \nu_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3\nu_2 + 15 + 32}{13 + \nu_2} \Leftrightarrow 4(13 + \nu_2) = 59 + 3\nu_2 \Leftrightarrow 52 + 4\nu_2 = 59 + 3\nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 = 7 .$$

β) Είναι

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \nu_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{\nu_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \nu_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \nu_3 (x_3 - \bar{x})^2 + \nu_4 (x_4 - \bar{x})^2}{\nu} =$$

$$= \frac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{6 + 7 + 3 + 4} = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 16}{20} =$$

$$= \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \frac{98}{20} = 4{,}9 .$$

γ) Είναι $\mathrm{CV} = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{S^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4{,}9}}{4} \approx \frac{2{,}2}{4} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 55\% > 10\%$,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.

Είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha,$$
$$f''(x) = 6x - 12.$$

Έτσι:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

β) Είναι για $x \neq \pm 1$:

$$\frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-9}{x+1}.$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-9}{x+1} = \frac{-6}{2} = -3$.

γ) Έστω $A\left(x_o, f(x_o)\right)$ το σημείο επαφής.

Επειδή η εφαπτομένη στο A είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

$\Rightarrow \lambda_{εφ} = -3 \Rightarrow f'(x_o) = -3 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 12x_o + 9 = -3 \Leftrightarrow$

$3x_o^2 - 12x_o + 12 = 0 \Leftrightarrow x_o^2 - 4x_o + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_o - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_o = 2.$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(2, f(2)\right)$.

Όμως $f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 7 = -5$ οπότε το σημείο επαφής είναι $A(2, -5)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = f'(2)x + \beta$, δηλ. $y = -3x + \beta$.

Όμως A ανήκει στην εφαπτομένη $\Rightarrow -5 = -3\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = -3x + 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x} = -\frac{x-2}{2x}$.

Με $x > 0$ είναι:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,2] και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, +∞).

β. Η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή:

$f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$.

Β. α. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, +∞) είναι:

$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \Rightarrow f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$.

Έτσι προκύπτει ότι το εύρος είναι:

$R = f(2) - f(8) = (\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1) - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) =$

$= \ln 2 - \ln 8 + 3 = \ln\frac{1}{4} + 3$.

Επίσης, η διάμεσος προκύπτει ότι είναι:

$f(4) = \ln 4 - 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β. Είναι $A = \left\{ \lambda \in \Omega \,\middle|\, 3 + \ln\frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \right\} =$

$= \left\{ \lambda \in \Omega \,\middle|\, \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \right\}$.

Επειδή $\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1,5)$, με $\lambda \in \Omega$ είναι

$A = \{2, 3, 4\}$. Έτσι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100}$.