

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 30.
A2. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 13.
A3. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 59.
A4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πλήθος των πωλητών της εταιρίας είναι: $v = 6 + 8 + 12 + 14 = 40$.

B2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
[2,4)	3	12	0,30
[4,6)	5	8	0,20
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

Είναι

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{40} = 0,30$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{40} = 0,20$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = 0,35$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = 0,15$$

B3. α)
$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = 5,7 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

β) Επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες, το πλήθος των πωλητών που βρίσκονται στο διάστημα [4,5, 6) είναι $\frac{6-4,5}{6-4} \cdot 8 = \frac{1,5}{2} \cdot 8 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.

Συνολικά, το ζητούμενο πλήθος πωλητών είναι: $6 + 14 + 6 = 26$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Είναι

$$f'(x) = 12x^2 - 7x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{αφού} \quad x_1 < x_2.$$

Ο πίνακας μεταβολής της f είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	$1/4$	$1/3$	$+\infty$
f'		+	-	+
f		↗	↘	↗

Προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{1}{3}$.

Έτσι είναι $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$.

Επειδή A, K, Π είναι ενδεχόμενα ασυμβίβαστα ανά δύο και $A \cup K \cup \Pi = \Omega$, ισχύει $P(A \cup K \cup \Pi) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = \frac{5}{12}$.

Γ2. Επειδή A, K, Π είναι ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα ισχύει:

$$P(\Gamma) = P(A \cup K) = P(A) + P(K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$P(\Delta) = P[(K \cup A)'] = 1 - P(K \cup A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$P(E) = P(A \cup \Pi') = P(A) \cup P(\Pi') = P(A \cup \Pi') = P(A) + 1 - P(\Pi) - [P(A) - P(A \cap \Pi)] = \frac{1}{3} + 1 - \frac{5}{12} - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{7}{12}.$$

Γ3. Έστω ότι έχουμε $N(A)$ άσπρες μπάλες, $N(K)$ κόκκινες μπάλες και $N(\Pi)$ πράσινες μπάλες.
Αν $N(\Pi) = x$ θα είναι $N(A) = x - 4$. Όμως

- $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{x-4}{N(\Omega)} = \frac{1}{3}$ οπότε, $3x - 12 = N(\Omega)$ (1).
- $P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{x}{N(\Omega)} = \frac{5}{12}$ οπότε, $12x = 5N(\Omega)$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει $x = 20$, $N(\Omega) = 48$

Άρα το δοχείο περιέχει συνολικά 48 μπάλες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω y dm η άλλη πλευρά της βάσης.

Αφού η βάση έχει σταθερή περίμετρο 20 dm είναι :

$$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x.$$

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού είναι:

$$\begin{aligned} E &= x \cdot y + 2 \cdot 5y + 2 \cdot 5x = x(10 - x) + 10(10 - x) + 10x = \\ &= 10x - x^2 + 100 - 10x + 10x = -x^2 + 10x + 100. \end{aligned}$$

Άρα $E(x) = -x^2 + 10x + 100$ με $x \in (0, 10)$.

Είναι $E'(x) = -2x + 10$, $x \in (0, 10)$.

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	0	5	10
E'		+	-
E		↗	↘

Άρα η $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$ dm.

Δ2. α) Αφού το δείγμα των τετημένων x_i δεν είναι ομοιογενές θα ισχύει

$$C_y > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S}{8} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow S > \frac{4}{5}.$$

Από την εξίσωση $2S^2 - 5S + 2 = 0$ προκύπτει $S = 2$ ή $S = \frac{1}{2}$. Επειδή $S > \frac{4}{5}$ επιλέγουμε $S = 2$.

β) Η ζητούμενη μέση τιμή των x_i^2 είναι $\overline{x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15}$.

Ο τύπος $S^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu} \right\}$ μετασχηματίζεται:

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu^2} \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} \right)^2}{1} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \bar{x}^2 =$$

$$= \overline{x_i^2} - \bar{x}^2 \quad (1).$$

Η σχέση (1) για $\nu = 15$ και δεδομένου ότι $S = 2$, $\bar{x} = 8$ γίνεται:

$$2^2 = \overline{x_i^2} - 8^2 \Leftrightarrow 4 = \overline{x_i^2} - 64 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 68, \text{ που είναι η ζητούμενη μέση τιμή.}$$

Δ3. Η συνάρτηση $E(x)$ στο διάστημα $[5, 10]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα αφού $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{15} = 9 \Rightarrow E(x_1) > E(x_2) > \dots > E(x_{15})$.

Άρα το εύρος των $E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_{15})$ είναι:

$$R = E(x_1) - E(x_{15}) = E(5) - E(9) = 125 - 109 = 16.$$

Είναι $y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow E(x_i) > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 9 \cdot 16 + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x_i^2 + 14x_i - 45 > 0 \Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0 \quad (1).$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_i^2 - 14x_i + 45$ είναι 5 και 9 και ο πίνακας προσήμων του είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	5	9	$+\infty$
$x^2 - 14x + 45$				
	+	-	+	

Άρα η (1) ισχύει όταν $5 < x_i < 9 \Rightarrow x_i \in \{x_2, x_3, \dots, x_{14}\}$

Άρα το ενδεχόμενο B είναι: $B = \{A_2, A_3, \dots, A_{14}\}$ ενώ $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$.

Έτσι προκύπτει $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$.