

Θέματα Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου 2000

Ζήτημα 1ο

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A ($x_0, f(x_0)$).

(Μονάδες 4)

A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 8,5)

B1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .

β) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 4,5)

B2.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη A	Συναρτήσεις	Στήλη B Εφαπτόμενες
α.	$f(x) = 3x^3, x_0 = 1$	1. $y = -2x + \pi$
β.	$f(x) = \eta\mu 2x, x_0 = \eta/2$	2. $y = (1/4)x + 1$
γ.	$f(x) = 3 x , x_0 = 0$	3. $y = 9x - 6$
δ.	$f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$	4. $y = -9x + 5$
		5. δεν υπάρχει

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

A1. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

A2. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Τότε για $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

B1.

α) Η πρόταση είναι **λανθασμένη**, αφού η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{έχει} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ενώ δεν είναι συνεχής στο 0.

β) Γνωρίζουμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 , θα είναι συνεχής σε αυτό, άρα, αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η πρόταση είναι **λάθος**.

γ) Επειδή υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0 , υπάρχει και η παράγωγος της f' στο x_0 , άρα η f' είναι συνεχής στο x_0 και η πρόταση είναι **σωστή**.

Επομένως έχουμε: **α - Λ, β - Λ, γ - Σ.**

B.2.

α) $f'(x) = 9x^2$, άρα $f'(1) = 9$ και $f(1) = 3$.

Επομένως εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 3 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 6.$$

β) $f'(x) = 2\sin 2x$, άρα $f'(\pi/2) = 2\sin \pi = -2$ και $f(\pi/2) = 0$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 0 = -2(x - (\pi/2)) \Leftrightarrow y = -2x + \pi.$$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = 3|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη.

δ) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ άρα $f'(4) = 1/4$ και $f(4) = 2$

Επομένως εξίσωση εφαπτομένης είναι η:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &\leftrightarrow 3 \\ \beta &\leftrightarrow 1 \\ \gamma &\leftrightarrow 5 \\ \delta &\leftrightarrow 2. \end{aligned}$$

Ζήτημα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{2z + i}{z - 2} \quad z \in \mathbb{C}$$

με $z \neq -2i$, όπου \bar{z} ο συζυγής του z .

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$W_1 = f(9 - 5i)$$

(Μονάδες 6)

$$W_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i) \right]^{2004}$$

(Μονάδες 6)

β) Θεωρούμε τον πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{2} |W_1| & 0 \\ 3 & -|W_1| \end{bmatrix}$$

όπου $|W_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού W_1 του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Ο γραμμικός μετασχηματισμός T με πίνακα M είναι:

- A. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \pi/4$
- B. συμμετρία ως προς τον άξονα xx'
- Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα yy'
- Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$
- E. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Μονάδες 5)

γ) Αν M ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας X , ώστε να ισχύει:

$$MX = K$$

όπου K είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \pi/2$.

(Μονάδες 8)

Απάντηση:

α) Είναι:

$$W_1 = f(9 - 5i) = \frac{2(9 - 5i) + i}{9 + 5i - 2i} = \frac{18 - 10i + i}{9 + 3i} = \frac{18 - 9i}{9 + 3i} =$$

$$= \frac{6 - 3i}{3 + i} = \frac{(6 - 3i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{18 - 6i - 9i - 3}{9 + 1} = \frac{15 - 15i}{10} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{συν}\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επειδή είναι:

$$\text{συν}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

προκύπτει ότι $\varphi = 7\pi/4$.

Άρα:

$$W_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} \left(\text{συν} \frac{7\pi}{4} + i\eta\mu \frac{7\pi}{4} \right)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}^{2004} = \\ &= \cos\left(-\frac{2004\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2004\pi}{4}\right) = \\ &= \cos(-501\pi) + i\sin(-501\pi) = \\ &= \cos(-2 \cdot 250\pi - \pi) + i\sin(-2 \cdot 250\pi - \pi) = \\ &= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) \Leftrightarrow W_2 = \cos\pi + i\sin\pi. \end{aligned}$$

β) Έχουμε ότι:

$$|W_1| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \text{και} \quad |W_2| = 1,$$

άρα:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας M είναι πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού: «συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x''$ », άρα σωστό είναι το **B**.

$$\gamma) K = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμως:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$MX = K \Leftrightarrow X = M^{-1}K \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ζήτημα 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

α. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

(Μονάδες 7)

β. Υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

(Μονάδες 12)

γ. Υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

(Μονάδες 6)

Απάντηση:

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, άρα θα είναι και συνεχής στο $[0, 1]$. Επίσης, επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, θα είναι η f γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$[f(0), f(1)] = [2, 4]$$

Όμως, $3 \in [2, 4]$ και, αφού f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f τέμνεται από την ευθεία $y = 3$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα:

$$f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$$

$$f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$$

$$f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1)$$

$$f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Όμως, η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο M είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: y = 2x + 2000$, αφού $\lambda_\epsilon = f'(x_2) = 2$.

Ζήτημα 4ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

(Μονάδες 15)

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(t) = \frac{\alpha \cdot \left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right] - \alpha t \cdot 2 \frac{t}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta}}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2} = \frac{\alpha \left[1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2}, \quad t \geq 0$$

α) Αφού σε $t = 6$ ώρες επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή $f(t) = 15$ μονάδες, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(6) = 15 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\alpha}{1 + \frac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \alpha \left[1 - \frac{6^2}{\beta^2} \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \frac{540}{\beta^2} \\ -\frac{36}{\beta^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \frac{540}{\beta^2} \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 30 \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = \pm 6 \end{cases}$$

Αφού $\beta > 0$, η τιμή $\beta = -6$ απορρίπτεται, άρα $\beta = 6$.

Επομένως:

$$f(t) = \frac{5t}{1 + \frac{t^2}{36}} = \frac{180t}{36 + t^2}, \quad t \geq 0$$

β) Αφού το φάρμακο έχει αποτελεσματική δράση όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, ψάχνουμε τις τιμές του t , έτσι ώστε: $f(t) \geq 12$, με $t \geq 0$. Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{180t}{36 + t^2} &\geq 12 \Leftrightarrow 180t \geq 432 + 12t^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12t^2 - 180t + 432 &\leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 &\leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12 \end{aligned}$$

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες έως 12 ώρες.