

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να δείξετε ότι

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a).$$

Μονάδες 12

- B.1.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει

$$f'(x) = \sigma \nu \nu x.$$

Μονάδες 8

- B.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ και συνεχής στο (a, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

- β.** Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

- γ.** Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

- δ.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx.$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδα 1

Απάντηση:

A. Θεωρία. (απόδειξη σελ. 335 σχολ. βιβλίου).

B.1. Θεωρία (σελίδες 224 - 225) σχολ. βιβλίου)

B.2. α Λ
β Λ
γ Σ
δ Σ
ε Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v \cdot z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z και $f(13)$.

Μονάδες 10

Απάντηση:

α.

$$\begin{aligned} f(3) + f(8) + f(13) + f(18) &= \\ &= i^3 \cdot z + i^8 \cdot z + i^{13} \cdot z + i^{18} \cdot z = \\ &= i^2 \cdot i \cdot z + (i^2)^4 \cdot z + (i^2)^6 \cdot i \cdot z + (i^2)^9 \cdot z = \\ &= (-1) \cdot i \cdot z + z + (-1)^6 \cdot i \cdot z + (-1)^9 \cdot z = \\ &= -i \cdot z + z + i \cdot z - z = 0 \end{aligned}$$

β. $|z| = \rho$, $\text{Arg}(z) = \theta$.
Για $v = 13$ έχουμε:
 $f(13) = i^{13} \cdot z = (i^2)^6 \cdot i \cdot z = (-1)^6 \cdot i \cdot z = i \cdot z$

Επειδή ο μιγαδικός z έχει μέτρο ρ και πρωτεύον όρισμα θ , θα έχει την ακόλουθη τριγωνομετρική μορφή:

$$z = |z| (\cos\theta + i \eta\mu\theta) = \rho (\cos\theta + i\eta\mu\theta) \quad (1)$$

Η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού i είναι:

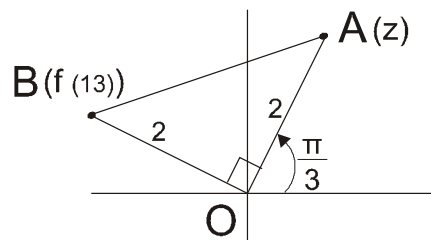
$$1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $f(13) = i \cdot z$ γράφεται:

$$\begin{aligned} f(13) &= \left[1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2} \right) \right] [\rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta)] = \\ &= 1 \cdot \rho \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right] = \\ &= \rho \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right] \end{aligned}$$

γ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και για $\rho=2$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

έχουμε: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$, $f(13) = iz$. Έτσι αν A η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, η εικόνα B του $f(13) = iz$ προκύπτει από στροφή της διανυσματικής ακτίνας A του z κατά $\frac{\pi}{2}$.



Επειδή το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο στο O με μήκη κάθετων πλευρών 2 , θα έχει εμβαδόν $\frac{2^2}{2} = 2$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

- β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση:
 $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο
θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

Απάντηση:

α.

Επειδή η f είναι συνάρτηση έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$g(x_1) = g(x_2) \text{ έπεται}$$

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \text{ ή}$$

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \quad (1)$$

Επειδή όμως η $f \circ g$ είναι 1-1 στο \mathbb{R} προκύπτει από την (1) ότι

$$x_1 = x_2.$$

Έτσι δείξαμε ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } g(x_1) = g(x_2) \text{ προκύπτει } x_1 = x_2$$

Άρα η g είναι 1-1.

β.

Έχουμε:

$$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$$

Επειδή η g είναι 1-1 στο \mathbb{R} , προκύπτει ότι:

$$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \quad \text{ή}$$

$$x^3 - x = +2x - 1 \quad \text{ή}$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Η μονοτονία της $h(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
$h(x)$	\nearrow		\searrow		\nearrow
		Τ.μεγ. $h(-1)=3$	Τ.ελαχ. $h(1)=-1$		

- Η h στο διάστημα $[-2, -1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, αφού:
 - Η h συνεχής στο $[-2, -1]$ ως πολυωνυμική και
 - $h(-2) \cdot h(-1) = (-1) \cdot (+3) = -3 < 0$
 Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$. Επειδή η h στο $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως αύξουσα η παραπάνω ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(-\infty, -1]$.
- Έχουμε $h(0) = 1$ και $h(1) = -1$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $h(0) \cdot h(1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ προκύπτει ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 . Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$, προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο $[-1, 1]$.
- Έχουμε $h(1) = -1$ και $h(2) = 3$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και $h(1) \cdot h(2) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$ προκύπτει ότι στο διάστημα $(1, 2)$ η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_3 . Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο $[1, +\infty)$.

Επειδή:

 - $x_1 \in (-2, -1)$ είναι $x_1 < 0$
 - $x_2 \in (0, 1)$ είναι $x_2 > 0$
 - $x_3 \in (1, 2)$ είναι $x_3 > 0$
 Έτσι η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα στο \mathbb{R} .

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[a, \beta]$.
 Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,

τότε και
$$\int_a^\beta h(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx .$$

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

Μονάδες 5

ii) Να δείξετε ότι
$$\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x),$$

 για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0, x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

Μονάδες 6**Απάντηση:**

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$\varphi(x) = h(x) - g(x) \quad x \in [a, \beta]$$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή είναι $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ προκύπτει ότι

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta].$$

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα 3 σελίδα 332 σχολ. βιβλίου έχουμε:

$$\int_a^\beta \varphi(x) dx > 0 \quad \text{ή} \quad \int_a^\beta (h(x) - g(x)) dx > 0 \quad \text{ή} \quad \int_a^\beta h(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx > 0$$

Άρα
$$\int_a^\beta h(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx .$$

β.i.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} έχουμε:

$$f'(x) - e^{-f(x)} (-f(x))' = 1 \quad \text{ή}$$

$$f'(x) + f'(x) e^{-f(x)} = 1 \quad \text{ή}$$

$$f'(x) [1 + e^{-f(x)}] = 1 \quad \text{ή}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}, \text{ αφού } 1 + e^{-f(x)} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{f(x)}}} = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1} \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

β.ii.

Επειδή είναι $f(0) = 0$ η ζητούμενη ανίσωση

$$\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) \text{ για } x > 0 \text{ γράφεται:}$$

$$\frac{x}{2} < f(x) - f(0) < x f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x).$$

Η f στο $[0, x]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει

$$\text{ένα τουλάχιστον } \xi \in (0, x): f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Τότε όμως αρκεί να δειχθεί

$$\frac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x) \quad \text{ή}$$
$$\frac{e^{f(0)}}{1 + e^{f(0)}} < f'(\xi) < f'(x) \quad \text{ή}$$
$$f'(0) < f'(\xi) < f'(x), \text{ με } 0 < \xi < x.$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x]$.

Υπολογίζοντας την $f''(x)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} \right)' = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot (1 + e^{f(x)}) - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} =$$

$$= \frac{e^{f(x)} \cdot \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}}{(1 + e^{f(x)})^2} = \frac{e^{2f(x)}}{[1 + e^{f(x)}]^3} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα και στο $[0, x]$.

β.iii.

Από β.ii. είναι $f(x) > \frac{x}{2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα και στο $[0,1]$, θα είναι $E = \int_0^1 f(x) dx$.

Οι συναρτήσεις $\frac{x}{2}$, $f(x)$, $xf'(x)$ είναι συνεχείς στο \mathbb{R} , οπότε με βάση το ερώτημα α) από $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ είναι:

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E.$$

$$\text{Έτσι } \frac{1}{4} < E \text{ και } 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} f(1).$$

$$\text{Οπότε τελικά } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$