

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2004

ΘΕΜΑ1ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

- β.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

Μονάδες 2

- γ.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$.

Μονάδες 2

- δ.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

- ε.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 2

Απάντηση:

- A.** Θεώρημα (Fermat) σελ. 260 σχολ. βιβλίου.

- B.** Ορισμός σελ. 213 σχολ. βιβλίου.

- Γ.**

α	β	γ	δ	ε
Σ	*	Λ	Λ	Σ

(*) Η απάντηση στο ερώτημα 1 Γ β μπορεί να χαρακτηριστεί Σωστό μόνο εφ' όσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Όπως είναι

διατυπωμένη, σωστό είναι μόνο το αντίστροφο. Δηλαδή αν
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αφού για την περίπτωση του ευθέως
 μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα ορισμού της f και τα μεμονωμένα σύνολα (a, x_0)
 ή (x_0, β) . Επομένως από αυστηρή μαθηματική άποψη, η απάντηση είναι Λάθος.

ΘΕΜΑ2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμψής.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 10

Μονάδες 8

Μονάδες 7

Απάντηση:

α. Πρέπει $x > 0$. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' αυτό με

$$f'(x) = (x^2 \cdot \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 (\ln x)' =$$

$$= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1)$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2 \ln x + 1) = 0. \text{ Οπότε:}$$

$x = 0$ απορρίπτεται αφού $A_f = (0, +\infty)$

$$\text{ή } 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}.$$

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
f'		-	+
f			

T. min.

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$, αφού είναι συνεχής στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$ και ισχύει ότι $f'(x) < 0$ στο $(0, e^{-\frac{1}{2}})$.

- Γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x) > 0$ στο $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = e^{-\frac{1}{2}}$ το

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} = -\frac{1}{2e}$$

β. Η f είναι και $2^{\text{η}}$ φορά παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο δις παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό με $f''(x) = (2x \cdot \ln x + x)' = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$.

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0	$e^{-3/2}$	$+\infty$
f''		-	+
f		Σ.Κ	

$$f(e^{-\frac{3}{2}}) = (e^{-\frac{3}{2}})^2 \cdot \ln(e^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2} e^{-3} = -\frac{3}{2e^3}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- κοίλη στο $(0, e^{-\frac{3}{2}}]$
- κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει σημείο καμψής το $M (e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3})$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{(De L'Hospital)}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^4}{2x^2} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot \ln x) = +\infty.$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$, είναι

$$f\left((0, e^{-\frac{1}{2}}]\right) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ είναι

$$f\left([e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)\right) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f((0, +\infty)) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

Έτσι, το τοπικό ακρότατο από το ερώτημα α, μπορεί να χαρακτηριστεί και ως ολικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και

$$f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$.

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Αφού f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό. Άρα η g είναι και συνεχής στο \mathbb{R} .

Έτσι η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}$ με

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x).$$

$$\text{Επίσης είναι } \left. \begin{array}{l} g(0) = e^0 f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \text{ άρα } g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right).$$

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} (f(\xi) + f'(\xi)) = 0.$$

Όμως $e^\xi \neq 0$ άρα προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

β. Αφού $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^0 g(x) dx = \int_a^0 e^x (2x^2 - 3x) dx = \int_a^0 (e^x)' (2x^2 - 3x) dx = \\ &= [e^x (2x^2 - 3x)]_a^0 - \int_a^0 e^x (2x^2 - 3x)' dx = \\ &= [e^x (2x^2 - 3x)]_a^0 - \int_a^0 e^x (4x - 3) dx = [e^x (2x^2 - 3x)]_a^0 - \int_a^0 (e^x)' (4x - 3) dx = \\ &= [e^x (2x^2 - 3x)]_a^0 - [e^x (4x - 3)]_a^0 + \int_a^0 e^x (4x - 3)' dx = \\ &= [e^x (2x^2 - 3x)]_a^0 - [e^x (4x - 3)]_a^0 + \int_a^0 e^x \cdot 4 dx = \\ &= [e^x (2x^2 - 3x)]_a^0 - [e^x (4x - 3)]_a^0 + 4[e^x]_a^0 = \\ &= -e^a (2a^2 - 3a) - e^0 (-3) + e^a (4a - 3) + 4e^0 - 4e^a = \\ &= -e^a (2a^2 - 3a) + 3 + e^a (4a - 3) + 4 - 4e^a = 7 + e^a (4a - 3 - 2a^2 + 3a - 4) = \\ &= 7 + e^a (-2a^2 + 7a - 7). \end{aligned}$$

Άρα $I(a) = 7 + e^a (-2a^2 + 7a - 7)$, $a \in \mathbb{R}$.

γ. Είναι για $a < 0$, $I(a) = 7 + e^a \cdot a^2 \left[-2 + \frac{7}{a} - \frac{7}{a^2}\right]$.

Έχουμε $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (e^\alpha \cdot \alpha^2) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^2}{\frac{1}{e^\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{2\alpha}{-\frac{1}{e^\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{2\alpha}{e^{-\alpha}} = 0$

και $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[-2 + \frac{7}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2}\right] = -2$

Άρα $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = 7 + 0(-2) = 7$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0,$$

όπου $z=a+\beta i \in \mathbb{C}$, με $a, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να βρείτε τη g' .

Μονάδες 5

- β.** Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$.

Μονάδες 8

- γ.** Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$$

Μονάδες 6

- δ.** Αν επιπλέον $f(2)=a>0$, $f(3)=\beta$ και $a>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Απάντηση:

- α.** Η συνάρτηση $g(x)$ γράφεται:

$$g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t) dt - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right| \cdot (x-1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , η συνάρτηση $\phi(x) = \int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα, η συνάρτηση $h(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική. Έτσι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{x^3} f(t) dt = \phi(h(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h και ϕ στο \mathbb{R} , με

$$F'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot f(x^3).$$

Ακόμα η συνάρτηση $l(x) = 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right| \cdot (x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$l'(x) = 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 3x^2 \cdot |z| \cdot f(x^3) - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

- β.** Αφού $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(1)=0$, η δοσμένη ανισότητα γράφεται:

$$g(x) \geq g(1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι όμως η g στο $x_0=1$ παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται από θ . Fermat ότι $g'(1)=0$.

Όμως $g'(1) = 3 \cdot |z| \cdot f(1) - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right|$ και επειδή $f(1) = 1$ βρίσκουμε ότι

$$g'(1) = 3 \cdot |z| - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

Αφού $g'(1) = 0$, έπεται $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$.

γ. Επειδή είναι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$, προκύπτει ότι $|z|^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \cdot \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right)$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow 0 = z^2 + \bar{z}^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$$

δ. Είναι

$z^2 = (\alpha + \beta \cdot i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot i$ οπότε $\operatorname{Re}(z^2) = \alpha^2 - \beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}.$$

Επειδή $\alpha > \beta$ προκύπτει ότι

$$\alpha + \beta < 0, \quad \text{οπότε} \quad \beta < -\alpha < 0.$$

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $[2,3]$ είναι: $f(2) = \alpha > 0$ και $f(3) = \beta < 0$, οπότε $f(2) \cdot f(3) < 0$.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα $[2,3]$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.