

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

A.1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$

A.2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

B.

$\alpha \rightarrow \Lambda$,

$\beta \rightarrow \Lambda$

$\gamma \rightarrow \Sigma$

$\delta \rightarrow \Sigma$

$\varepsilon \rightarrow \Lambda$

$\sigma\tau \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2

α. Από τη σχέση $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ έχουμε:

$$|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$$

β. Αρκεί (*) να δείχθεί ότι:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_2 + z_1} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_2 + \bar{z}_1} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_2 + z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$$

Όμως $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{9}{z_3}$ αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

$$\text{Άρα } \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2}$$

* Ισχύει ότι $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

γιατί αν $z = \alpha + \beta i$ τότε $\bar{z} = \alpha - \beta i$ άρα $z - \bar{z} = 2\beta i$ (1).

$$\text{Έτσι } z = \bar{z} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbf{IR} \quad (1)$$

γ. α' τρόπος

Είναι:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3| &= \sqrt{|z_1 + z_2 + z_3|^2} = \sqrt{\overline{|z_1 + z_2 + z_3|} |z_1 + z_2 + z_3|} = \sqrt{\left(\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)} = 9 \sqrt{\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3}} \\ &= 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1| |z_2| |z_3|} = 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{27} = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|. \end{aligned}$$

β' τρόπος

Είναι:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3|^2 &= \frac{1}{9} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|^2 \Leftrightarrow \\ (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) &= \frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\overline{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}) \\ (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) &= \frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\overline{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}) \\ (z_1 + z_2 + z_3) \left(\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right) &= \frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \left(\frac{81}{z_1 z_2} + \frac{81}{z_2 z_3} + \frac{81}{z_3 z_1} \right) \\ 9(z_1 + z_2 + z_3) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) &= \frac{81}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \left(\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_1} \right) \\ \left(1 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + 1 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + 1 \right) &= \left(1 + \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} + \frac{z_1 z_2}{z_3 z_1} + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} + 1 + \frac{z_2 z_3}{z_3 z_1} + \frac{z_3 z_1}{z_1 z_2} + \frac{z_3 z_1}{z_2 z_3} + 1 \right) \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} &= \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_2}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισχύει προφανώς, άρα και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό, με $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$, $x \in \mathbf{R}$.

Είναι $\lambda > 0$, $e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} .

β. Έστω $(x_0, f(x_0))$ οι συντεταγμένες του σημείου M . Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0).$$

Για να διέρχεται η (ϵ) από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί:

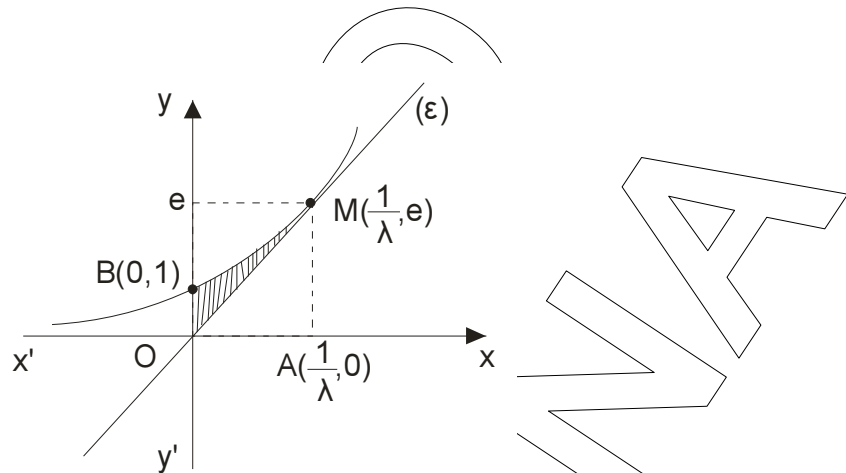
$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (0 - x_0) \Leftrightarrow -1 = \lambda(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Έτσι η (ε) γίνεται:

$$y - e = \lambda e(x - \frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow y = \lambda e x.$$

Οι συντεταγμένες του M είναι: $M(\frac{1}{\lambda}, e)$.

γ.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με:

$$(OAMB) - (OAM) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot e - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e - 2 - e}{2\lambda} = \frac{e - 2}{2\lambda}.$$

$$\delta. \text{ Είναι } \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e - 2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{(e - 2)\lambda}{2(2 + \eta\mu\lambda)} = \frac{e - 2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}}.$$

Για κάθε $\lambda > 0$ είναι:

$$-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda}.$$

Όμως $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\lambda} \right) = 0$, οπότε με βάση το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} = 0, \text{ ενώ } \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} > 0.$$

Έτσι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$ και αφού $\frac{e - 2}{2} > 0$ προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty.$$

Παρατήρηση:

Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου $E(\lambda)$ είναι δυνατόν να μη χρησιμοποιηθεί το σχήμα ως εξής:

Για την $f(x) = e^{\lambda x}$ είναι $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ και $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής. (Σχόλιο σελ. 274 σχολικού βιβλίου).

Έτσι $f(x) \geq \lambda e^x \Leftrightarrow f(x) - \lambda e^x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση

$g(x) = f(x) - \lambda e^x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda e^x) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e^x) dx = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{\lambda e^x}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \dots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

ΘΕΜΑ 4

α. Από τη δοσμένη σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \quad \text{ή}$$

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x \quad \text{ή}$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$(e^{f(x)})' = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$(e^{f(x)})' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Για $x=0$ έχουμε: $e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + C$

η οποία λόγω του ότι $f(0) = 0$ γράφεται:

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Οπότε: $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2}$

Άρα: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

β. Θέτουμε $x - t = u$.

Διαφορίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε $du = -dt$.

Επιπλέον για $t=0$ είναι $u = x$, ενώ για $t=x$ είναι $u = 0$.

Έτσι:

$$\int_0^x f(x-t) dt = -\int_x^0 f(u) du = \int_0^x f(u) du$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta\mu x}.$$

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε η $\int_0^x f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$\left(\int_0^x f(u) du \right)' = f(x).$$

Επειδή η $\int_0^x f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} θα είναι και συνεχής σ' αυτό.

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(u) du \right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = \frac{f(0)}{\sin 0} = \frac{f(0)}{0} = 0.$$

(Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα είναι και συνεχής σ' αυτό.)

γ. Είναι

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = \int_{-x}^0 t^{2005} f(t) dt + \int_0^x t^{2005} f(t) dt = \int_0^x t^{2005} f(t) dt - \int_0^{-x} t^{2005} f(t) dt.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = t^{2005} \cdot f(t)$ η $h(x)$ γράφεται:

$$h(x) = \int_0^x \varphi(t) dt - \int_0^{-x} \varphi(t) dt.$$

Η $\varphi(t) = t^{2005} \cdot f(t)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η συνάρτηση $\kappa(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $\kappa'(x) = \varphi(x) = x^{2005} \cdot f(x)$, όπως επίσης είναι

παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\kappa(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt$ ως σύνθεση των

παραγωγίσιμων $-x$, $\kappa(x)$, με $(\kappa(-x))' = \varphi(-x)(-x)' = -\varphi(-x)$.

Επομένως

$$h'(x) = (\kappa(x) - \kappa(-x))' = \varphi(x) + \varphi(-x) = x^{2005} f(x) + (-x)^{2005} f(-x) =$$

$$= x^{2005} \cdot \ln \left(\frac{1+e^x}{2} \right) - x^{2005} \cdot \ln \left(\frac{1+e^{-x}}{2} \right) = x^{2005} \cdot \ln \left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}} \right) = x^{2005} \cdot \ln \left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}} \right) =$$

$$= x^{2005} \cdot \ln \left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}} \right) = x^{2005} \cdot \ln \left[\frac{e^x(1+e^x)}{e^x+1} \right] = x^{2005} \cdot \ln e^x = x^{2005} \cdot x = x^{2006}.$$

Ακόμα η $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 2007 \cdot \frac{x^{2006}}{2007} = x^{2006}$.

Επειδή $h'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Όμως για $x=0$ είναι $h(0) = g(0) = 0$, άρα $c = 0$.

Επομένως $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = \frac{1}{2008}$ λόγω του ερωτήματος γ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$P(x) = 2008x^{2007} - 2007, x \in [0, 1].$$

Η P είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα και στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.

$$P(0) = -2007 < 0 \text{ κ' } P(1) = 1 > 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

Επιπλέον η $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική, άρα και στο $[0, 1]$ με $P'(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}$.

Είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$.

Άρα η $P(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.