ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία, σελίδα 98 σχολ. βιβλίου.
Α.2 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 141 σχολ. βιβλίου.
Α.3 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 280 σχολ. βιβλίου.

Β. **α.** → Λ **β.** → Λ **γ.** → Λ **δ.** → Σ **ε.** → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Άρα $|z| = \left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1.$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

β.

Για α = 0 έχουμε: $z_1 = \dfrac{2+0i}{0+2i} = \dfrac{1}{i} = -i = 0 - i$.

Για α = 2 έχουμε: $z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = 1 = 1 + 0i$.

i. Αν Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι
d(A, B) = $|z_1 - z_2| = |(0-i)-(1+0\,i)| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$.

ii. Είναι: $(z_1)^{2\nu} = \left((z_1)^2\right)^{\nu} = ((-i)^2)^{\nu} = (-1)^{\nu} = (-z_2)^{\nu}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
Οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f΄		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο
$x_1 = -1$, το $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο
$x_2 = 1$, το $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$.

Επίσης είναι: $f''(x) = 6x$.

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_3 = 0$, το $f(x_3) = -2ημ^2θ$.

β.

i. Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 2συν^2θ > 0$ και f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, -1]$, προκύπτει: $f\big((-\infty, -1]\big) = (-\infty, 2συν^2θ]$

Επειδή $0 \in f\big((-\infty, -1]\big)$, υπάρχει $ρ_1 \in (-\infty, -1)$ ώστε $f(ρ_1) = 0$. Η ρίζα $ρ_1$ είναι και μοναδική στο $(-\infty, -1]$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii. Επειδή $f(-1) = 2συν^2θ > 0$, $f(1) = -2(1 + ημ^2θ) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ προκύπτει: $f\big([-1, 1]\big) = \big[-2(1 + ημ^2θ), 2συν^2θ\big]$.

Επειδή $0 \in f\big([-1, 1]\big)$, υπάρχει $ρ_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f(ρ_2) = 0$. Η ρίζα $ρ_2$ είναι και μοναδική στο $[-1, 1]$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

iii. Επειδή $f(1) = -2(1 + ημ^2θ) < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ προκύπτει: $f\big([1, +\infty)\big) = \big[-2(1 + ημ^2θ), +\infty\big)$.

Επειδή $0 \in f\big([1, +\infty)\big)$, υπάρχει $ρ_3 \in (1, +\infty)$ ώστε $f(ρ_3) = 0$. Η ρίζα $ρ_3$ είναι και αυτή μοναδική στο $[1, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε
$Α\big(-1, 2συν^2θ\big)$, $Β\big(1, -2(1 + ημ^2θ)\big)$, $Γ(0, -2ημ^2θ)$

$Α \in (ε)$ αφού:
$2συν^2θ = -2(-1) - 2ημ^2θ \Leftrightarrow 2(1 - ημ^2θ) = 2 - 2ημ^2θ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 - 2ημ^2θ = 2 - 2ημ^2θ$.

$Β \in (ε)$ αφού:
$-2(1 + ημ^2θ) = (-2) \cdot 1 - 2ημ^2θ$ ή $-2 - 2ημ^2θ = -2 - 2ημ^2θ$.

$\Gamma \in (\varepsilon)$ αφού:
$-2\eta\mu^2\theta = 2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta$ ή $-2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$.

δ. Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των C_f, ε:
$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν Ε του χωρίου είναι:

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x) - y|\, dx = \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\, dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

(*)$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.
$x^3 - x > 0$ για $x \in (-1, 0)$.
$x^3 - x < 0$ για $x \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού f, g συνεχείς στο [0, 1] η F είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με $F'(x) = f(x)g(x)$.
Όμως $g(x) > 0$ στο [0, 1] από υπόθεση, ενώ αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε: $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) > 0$, άρα $f(x) > 0$ στο [0, 1].
Συνεπώς $f(x) \cdot g(x) > 0$ στο [0, 1] και επομένως $F'(x) > 0$ στο [0, 1].
Οπότε F γνησίως αύξουσα στο [0, 1].

Έτσι για $x \in (0, 1]$ είναι $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > \int_0^0 f(t)g(t)dt \Rightarrow F(x) > 0$.

β. Είναι: $0 \leq t \leq x$ με $x \in (0, 1]$.
Αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε $t \leq x \Rightarrow f(t) \leq f(x)$
οπότε $f(x) - f(t) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.
Ακόμη $g(t) > 0$ στο (0, 1].
άρα και $g(t) \cdot [f(x) - f(t)] \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$.
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = x$
Ακόμη η $g(t) \cdot [f(x) - f(t)]$ συνεχής στο [0, x] με $x \in (0, 1]$.
Άρα $\int_0^x g(t)[f(x)-f(t)]dt > 0$ με $x \in (0, 1]$.

Επομένως για κάθε $x \in (0, 1]$ έχουμε:

$$\int_0^x g(t)f(x)\, dt - \int_0^x f(t)g(t)\, dt > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)\, dt > \int_0^x f(t)g(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x) > F(x).$$

γ. Είναι για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$: $g(t) > 0$.
Επίσης g συνεχής στο [0, x] άρα η $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ είναι παραγωγίσιμη και θετική για κάθε $x \in (0, 1]$.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ που ορίζεται και παραγωγίζεται στο (0, 1] με

$$H'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}=$$

$$=\frac{g(x)\big(f(x)G(x)-F(x)\big)}{G^2(x)}>0$$ στο (0, 1]. (Διότι από το ερώτημα β είναι $f(x)G(x)-F(x)>0$).

Άρα η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] και επομένως για $x \in (0, 1]$ έχουμε: $x \le 1 \Rightarrow H(x) \le H(1)$ δηλαδή $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\dfrac{\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2)\,dt}{x^5}$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

- Αφού οι F, G παραγωγίσιμες στο [0, 1] είναι και συνεχείς σε αυτό άρα:

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)=F(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} G(x)=G(0)=0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L.H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to 0^+} f(x)\overset{\text{f συνεχής}}{\underset{\text{στο }[0,1]}{=}} f(0). \quad (1)$$

- Η $\varphi(t)=\eta\mu(t^2)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η $\int_0^{x^2} \eta\mu t^2\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα $\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2)\,dt\right)=\int_0^0 \eta\mu(t^2)\,dt=0$

Ακόμη $\lim_{x\to 0^+} x^5=0$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt}{x^5}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt\right)'}{(x^5)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(x^4)\cdot 2x}{5x^4}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu(x^4)}{x^4}\cdot\frac{2}{5}x\right]=$$

$$=1\cdot\frac{2}{5}\cdot 0=0 \quad (2)$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0^+}K(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\right)\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}f(0)\cdot 0=0$