

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2008
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κούλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν:

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f''(x+1) > f'(x+1) - f'(x),$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Μονάδες 3