<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

Β. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

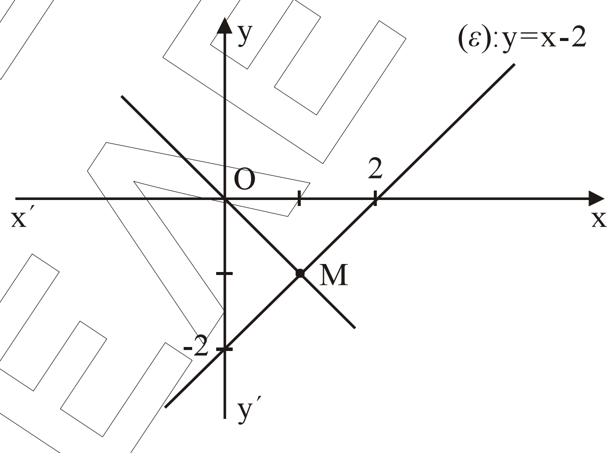
Α.

α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$.

Άρα $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο M για το οποίο είναι $OM \perp (\varepsilon)$.



Αφού $OM \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της OM είναι: $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (σημείου τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x,\ y = x - 2$.

Επομένως $M: \begin{cases} y=-x \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -x=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$. Άρα $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$.

Β. Έστω $w = x + yi$, με $x, y \in$ R. Η εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ γράφεται

$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1$

και $y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ και $y = 1 \Leftrightarrow (x = -4$ ή $x = 3)$ και $y = 1$.

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή $\alpha^x - \ln(x + 1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ (ολικό, άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β.

α. Για $\alpha = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και

$$f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+1}\right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, \infty)$ προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, με προφανή ρίζα $x = 0$ που είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{(f(\beta)-1)(x-2)+(f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \big(f(\beta) - 1\big)(x - 2) + \big(f(\gamma) - 1\big)(x - 1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -\big(f(\beta) - 1\big) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta \neq 0$,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma \neq 0$.

*(Πιο αναλυτικά είναι $f(0) - f(\beta) < 0$ διότι:

Αν $\beta \in (-1, 0)$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$-1 < \beta < 0 \Rightarrow f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(0) - f(\beta) < 0$

Αν $\beta \in (0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$0 < \beta \Leftrightarrow f(0) > f(\beta)$.

Ομοίως προκύπτει $f(\gamma) - f(0) > 0$).

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \big(f(\beta) - 1\big)(x_0 - 2) + \big(f(\gamma) - 1\big)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\big(f(\beta)-1\big)(x_0-2)+\big(f(0)-1\big)(x_0-1)}{(x_0-1)(x_0-2)} = 0 .$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

*Παρατήρηση: Θέτοντας χάριν συντομίας $f(\beta) - 1 = \kappa > 0$ και $f(\gamma) - 1 = \lambda > 0$ θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω λύσεις:

α) Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\kappa}{x-1} + \dfrac{\lambda}{x-2}$ με πεδίο ορισμού το (1, 2) έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$ ενώ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι είναι και γνησίως φθίνουσα στο (1, 2), διότι $h(x) = -\left(\dfrac{\kappa}{(x-1)^2} + \dfrac{\lambda}{(x-2)^2}\right) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα έχει σύνολο τιμών το $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x), \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = (-\infty, +\infty)$ και άρα το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της δηλαδή η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2).

Επίσης εναλλακτικά από το ότι η h έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί γ, δ ώστε $1 < \gamma < \delta < 2$ με $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα (γ, δ) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

β) Αλγεβρική λύση:

Θέτοντας $\dfrac{\kappa}{x-1}+\dfrac{\lambda}{x-2}=0,\ \ x\in(1,2)$ προκύπτει $\dfrac{\kappa(x-2)+\lambda(x-1)}{(x-1)(x-2)})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa(x-2)+\lambda(x-1)=0 \Leftrightarrow (\kappa+\lambda)\ x=2\kappa+\lambda \Leftrightarrow\ x=\dfrac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}$.

Η τιμή αυτή είναι αποδεκτή ως ρίζα της εξίσωσης αφού

$$1=\frac{\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+2\lambda}{\kappa+\lambda}=2$$ (και είναι μάλιστα μοναδική ρίζα).

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Η f συνεχής στο [0, 2] άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο [0, 2].

Επομένως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2], άρα είναι και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2].

Άρα η G είναι συνεχής στο (0, 2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στη θέση $x_0=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+3\right)=0-0+3=3$, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1}=0\cdot f(0)=0.$$

(είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2], και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\int\limits_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^0 tf(t)\mathrm{d}t=0$ διότι η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής, άρα η $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Επίσης $G(0)=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$

$=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=3$.

Άρα η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

β. Στο διάστημα $(0, 2)$ είναι:

- η συνάρτηση H παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής, με $H'(x) = xf(x)$.
- η συνάρτηση x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα και η συνάρτηση $\dfrac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x\cdot f(x)\cdot x - \int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ με $\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2},\ \ 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, με $G(0) = 3$ (από το β ερώτημα).

Βρίσκουμε την τιμή της G στη θέση $x = 2$: $G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + 3 \quad (1).$

Όμως

$$\int_0^2 (t-2)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t}{2} - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + 3 = 3 = G(0).$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

Όμως από β ερώτημα $G'(\alpha) = -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}$.

Άρα είναι $H(\alpha) = 0$.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, α] και παραγωγίσιμη στο (0, α). Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (0, α):

$$G'(\xi) = \frac{G(a)-G(0)}{a-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\dfrac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t + 3 - 3}{\alpha} \overset{H(a)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$-\frac{\int_0^{\xi} t\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\xi^2} = -\frac{\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\int_0^{\xi} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \xi^2\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

***β' τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ρίζα στο (0, α), με $\alpha \in$ (0, 2) για την εξίσωση:

$$\alpha\int_0^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = x^2\cdot\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \alpha H(x) = x^2\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2} = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(x) + \frac{1}{a}\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \left(G(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = 0 \qquad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x) = G(x) + \dfrac{x}{\alpha}\displaystyle\int_0^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ (αρχική της $G'(x) + \dfrac{x}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t$), για την οποία έχουμε :

α) είναι συνεχής στο [0, α) ως άθροισμα της συνεχούς G (από το α' ερώτημα) και της πολυωνυμικής $\left(\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$.

β) είναι παραγωγίσιμη στο (0, α) ως άθροισμα της παραγωγίσιμης G (από το β' ερώτημα) και της πολυωνυμικής, $\left(\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$ με $P'(x) = G'(x) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t$.

γ) $P(0) = P(\alpha) = 3$ διότι

$P(0) = G(0) + 0 = 3$ και

$$P(\alpha) = G(\alpha) + \int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t + 3 + \int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{H(a)}{\alpha} + 3 = \frac{0}{\alpha} + 3 = 3\,.$$

Έτσι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0,\alpha)$ ώστε

$P'(\xi)=0 \Leftrightarrow P'(\xi)=0 \Leftrightarrow G'(\xi)+\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t=0$, δηλαδή αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (1)

έχει ρίζα $\xi \in (0,\alpha)$.