ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 251 σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία σελ. 273 σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία σελ. 150 σχολικού βιβλίου.
Α4. α) → Λ, β) → Σ, γ) → Σ, δ) → Σ, ε) → Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν θέσουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, θα είναι $\overline{z} = x - yi$ και η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow \left[2\left(x^2+y^2\right)-4\right]+\left(2x-2\right)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x^2+y^2\right)-2\right]+\left(x-1\right)i=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2=0 \quad \text{και} \quad x-1=0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2=2 \quad \text{και} \quad x=1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2=1 \quad \text{και} \quad x=1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\pm 1 \quad \text{και} \quad x=1.$$

Άρα οι λύσεις είναι $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$.

Β2. Είναι

$$w=3\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\cdot\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\cdot\left[\frac{\left(1+i\right)\cdot(1-i)}{2}\right]^{39}=3\cdot\left[\frac{1+2i-1}{2}\right]^{39}=$$

$$=3\cdot(i)^{39}=3i^{38}\cdot i=3\cdot\left(i^2\right)^{19}\cdot i=$$

$$=3\cdot(-1)\cdot i=-3i.$$

Β3. Η σχέση $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$ γράφεται:
$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5.$
Αν $u = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $|x + yi - 3i| = 5 \Leftrightarrow$
$|x + yi - 3i|^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 5^2$.
Επομένως ο γ.τ. των μιγαδικών u είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως αποτέλεσμα αντίστοιχα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $h'(x)=1-\dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ για κάθε $x \in R$.

Άρα h είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επίσης, είναι $h''(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)'=-\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η h είναι κοίλη στο R.

Γ2. Η δοσμένη ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$e^{h(2h'(x)}<\dfrac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln\left[e^{h(2h'(x)}\right]<\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)$ (1)

Επειδή $h(1)=1-\ln(e+1)=\ln e-\ln(e+1)=\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)$ η (1) γράφεται

$\ln\left[e^{h(2h'(x))}\right]<h(1)\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<h(1)$.

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ισοδύναμα ότι $2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)$ (2).

Επειδή η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και $h'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι από τη (2) προκύπτει ισοδύναμα $x>0$.

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)\overset{*}{=}\ln 1=0$

*Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)=\lim\limits_{y\to0}\ln\left(1-y\right)=\ln 1=0$ (όπου έχουμε θέσει $y=\dfrac{1}{e^x+1}$).

Άρα η οριζόντια ασύμπτωση στο $+\infty$ είναι η $y=0$.

Για την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\ln(e^x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\dfrac{1}{x}\ln(e^x+1)\right]=1-0=1$.

Διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\ln 1=0$, (αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$) και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\ln(e^x+1)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(e^x+1)\right]=-\ln 1=0$.

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της h στο $-\infty$ είναι η $y=x$.

Γ4. Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της φ.

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αρκεί να μελετήσουμε την

$g(x)=h(x)+\ln 2=h(x)-h(0)$.

Όμως, $g'(x)=h'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $g(0)=h(0)-h(0)=0$.

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα x = 0 θα είναι μοναδική για την g.
Για x ≥ 0 θα είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$.

Επομένως $\varphi(x) = e^x \cdot g(x) \geq 0$ για κάθε x ∈ [0, 1].

Άρα $E = \int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \left[e^x h(x) + e^x \ln 2 \right] dx = \int_0^1 \left[\left(e^x\right)' \cdot h(x) \right] dx + \ln 2 \int_0^1 e^x dx =$

$$= \left[e^x h(x) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x) + \ln 2 \cdot \left[e^x \right]_0^1 = e \cdot h(1) - h(0) - \int_0^1 e^x \frac{1}{e^x + 1} dx + \ln 2(e-1) =$$

$$= e\left(1 - \ln\left(e+1\right)\right) + \ln 2 - \int_0^1 \frac{\left(e^x + 1\right)'}{e^x + 1} dx + \left(e - 1\right)\ln 2 =$$

$$= e - e\ln\left(e+1\right) + \ln 2 - \left[\ln\left(e^x + 1\right) \right]_0^1 + \left(e-1\right)\ln 2 =$$

$$= e - e\ln\left(e+1\right) + e\ln 2 - \left[\ln\left(e+1\right) - \ln 2 \right] = e - e\ln\left(e+1\right) + e\ln 2 - \ln\left(e+1\right) + \ln 2 =$$

$$= e - \ln\left(e+1\right) \cdot \left(e+1\right) + \ln 2 \cdot \left(e+1\right) =$$

$$= e - \left(e+1\right)\left[\ln\left(e+1\right) - \ln 2 \right] = e + \left(e+1\right) \cdot \ln\left(\frac{2}{e+1} \right) \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f θα είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ αρκεί να ισχύει $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$.

Όμως $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} e^x \overset{**}{=} e^0 = 1$.

* (Από τον κανόνα De l' Hospital).
** (Διότι e^x συνεχής).

Σημ. Το $\lim_{x \to 0} f(x)$ μπορεί να βρεθεί και χωρίς χρήση του κανόνα De l' Hospital, διότι $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$, αφού το $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$ είναι το όριο του λόγου μεταβολής της συνάρτησης e^x, και άρα ισούται με την παράγωγο της e^x στη θέση 0, δηλ. 1.

- Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{(e^x - 1)'x - (e^x - 1)(x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

  Για $x = 0$ είναι $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{*}{=}$

  $= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{*}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

* (Από τον κανόνα De l' Hospital).

Θέτουμε $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = xe^x$.

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Επίσης $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
$g'(x) < 0 \Leftrightarrow xe^x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών για την g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	↘	ολικό ελάχιστο =0	↗

Συμπεραίνουμε ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (έχει αποδειχθεί) αλλά και σε όλο το $\mathbb{R}^*$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ2. α) $1^{ος}$ τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \int_1^x f(u)\,du, \ x \in \mathbb{R}$.
Είναι $K'(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}$.
Για $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.
Με $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.
Με $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.
Για $x = 0$ είναι $f(0) = 1 > 0$.
Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισοδύναμα
$K'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η K είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Είναι $\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0 \Leftrightarrow K(2f'(x)) = K(1)$.
Επειδή K γν. αύξουσα θα είναι και 1-1.
Οπότε $2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$.
Όμως η f' είναι γν. αύξουσα διότι η f είναι κυρτή.
Άρα f' είναι 1-1 και έτσι προκύπτει $x = 0$ μοναδική ρίζα.

$2^{ος}$ τρόπος :

Η $x_0 = 0$ είναι προφανής ρίζα αφού $\int_1^{2f'(0)} f(u)\,\mathrm{du} = \int_1^{2\frac{1}{2}} f(u)\,\mathrm{du} = \int_1^{1} f(u)\,\mathrm{du} = 0$

Θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική.

Έστω ότι η εξίσωση έχει κι άλλη ρίζα $x_0 \neq 0$. Επειδή f είναι κυρτή στο R, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε θα έχουμε :

- αν $x_0 > 0 \Leftrightarrow f'(x_0) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x_0) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x_0) > 1$ και επειδή για $x > 0$ είναι

  $e^x > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$. Τότε όμως θα είναι και $\int_1^{2f'(x_0)} f(u)\,\mathrm{du} > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$, άτοπο.

- αν $x_0 < 0 \Leftrightarrow f'(x_0) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x_0) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x_0) < 1$ και επειδή για $x < 0$ είναι

  $e^x < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, θα είναι $f(x) > 0$. Τότε όμως θα είναι και $\int_{2f'(x_0)}^{1} f(u)\,\mathrm{du} > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{2f'(x_0)} f(u)\,\mathrm{du} > 0 \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x_0)} f(u)\,\mathrm{du} < 0 \Leftrightarrow 0 < 0$, επίσης άτοπο.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 0$.

β) Είναι $y(t) = f(x(t))$ (1). Η f έχει δειχθεί στο προηγούμενο ερώτημα ότι είναι παραγωγίσιμη, ενώ και η $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη, αφού δίνεται ότι έχει ρυθμό μεταβολής και μάλιστα θετικό, για κάθε $t \geq 0$. Έτσι η $y(t) = f(x(t))$ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα σύνθεσης παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Με παραγώγιση της (1) προκύπτει:

$$y'(t) = \left[f\left(x(t)\right)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = f'\left(x(t)\right) \cdot x'(t).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης y(t) ισχύει:

$$x'(t_0) = 2 \cdot y'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 2 \cdot f'\left(x(t_0)\right) \cdot x'(t_0) \overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow} f'\left(x(t_0)\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(x(t_0)\right) = f'(0).$$

Όμως f' γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, οπότε $x(t_0) = 0$.

α) Αν υπάρχει t_0 ώστε $x(t_0) = 0$, τότε $y(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) = 1$και το ζητούμενο σημείο είναι το M(0, 1).

β) Αν δεν υπάρχει t_0 ώστε $x(t_0) = 0$, τότε δεν υπάρχει και σημείο M με την ιδιότητα $x'(t_0) = 2 \cdot y'(t_0)$.

*Σημ. Η ύπαρξη t_0 ώστε $x(t_0) = 0$ <u>δεν είναι δεδομένη</u>, καθώς μπορεί να βρεθεί συνάρτηση x(t) με όλες τις τιμές της αρνητικές (άρα μη μηδενιζόμενη) και γνησίως αύξουσα. (Αντιπαράδειγμα : $x(t) = -\alpha^t$, με $0<a<1$).

Δ3. Η συνάρτηση g για $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x},\ x>0$ γράφεται

$$g(x)=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2\cdot(x-2)^2=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$g'(x) = 2(e^x - e)\cdot e^x\cdot(x-2)^2 + (e^x-e)^2\cdot 2\cdot(x-2) =$

$= 2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot[e^x\cdot(x-2)+e^x-e] =$

$= 2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot(e^x\cdot x-2e^x+e^x-e] =$

$= 2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot(xe^x-e^x-e)$.

- Θέτουμε $h(x)=x\cdot e^x-e^x-e,\ x\in(0,\infty)$. Η h είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
  Είναι $h'(x)=e^x+x\cdot e^x-e^x=x\cdot e^x>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞). Εξάλλου είναι $h(1)=-e<0,\ h(2)=e\cdot(e-1)>0$.
  Η h είναι συνεχής στο [1, 2] και επειδή $h(1)\cdot h(2)<0$, προκύπτει από το Θ. Boltzano ότι υπάρχει $x_0\in(1, 2)$ ώστε $h(x_0)=0$. Η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο (1, 2). Έτσι, με $x>x_0\Rightarrow h(x)>h(x_0)\Rightarrow h(x)>0$, ενώ με $x<x_0\Rightarrow h(x)<h(x_0)\Rightarrow h(x)<0$.

- $e^x-e=0\Leftrightarrow e^x=e^1\Leftrightarrow x=1$.
  $e^x-e>0\Leftrightarrow e^x>e^1\Leftrightarrow x>1$.
  $e^x-e<0\Leftrightarrow e^x<e^1\Leftrightarrow x<1$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
e^2- e		-	0	+		+		+	
x - 2		-		-		-	0	+	
h(x)		-		-	0	+		+	
g´		-	0	+		-		+	
g		↘		↗		↘		↗	
			τ.ε.		τ.μ.		τ.ε.		

Προκύπτει ότι η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μια θέση τοπικού μεγίστου.