

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .
(Μονάδες 9)
- A2.** Πότε η ευθεία $y=1$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;
(Μονάδες 3)
- A3.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;
(Μονάδες 3)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.
(Μονάδες 2)
- β)** Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
(Μονάδες 2)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΜΛ3Θ0(ε)

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

(Μονάδες 2)

δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 2)

ε) Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της είναι ίση με 0.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$
- $g(x) = (x-2) \cdot e^{x-1} + 1, x \in \mathbb{R}$

B1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

(Μονάδες 5)

B2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(1, f(1))$.

(Μονάδες 6)

B3. Να δείξετε ότι $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 9)

B4. Να δείξετε ότι $\int_{2015}^{2016} g(x) dx > 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 = 0, x \in \mathbb{R}.$
- $f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$
- $f(0) = \sqrt{3}.$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}, x \in \mathbb{R}.$

(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την $f^{-1}.$

(Μονάδες 5)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx.$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f και η $g(x) = \ln x + x, x > 0$ για τις οποίες ισχύει $f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x,$ για κάθε $x > 0.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $e^{x-x_0} = \frac{x_0}{x}.$

(Μονάδες 6)

Δ2. i) Έστω $0 < \alpha < 1.$ Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες $y = x, x = \alpha, x = 1$ είναι $E(\alpha) = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ τ.μ.

(Μονάδες 3)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Θ0(ε)

- ii) Η κατακόρυφη ευθεία $x = a$ του προηγούμενου ερωτήματος μετατοπίζεται οριζόντια με τη θέση του αριθμού $a = a(t), t \geq 0$ στον άξονα $x'x$ να μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec.
Αν για $t = 0$ ισχύει $0 < a < x_0$, να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή στην οποία $a = x_0$ cm, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(a)$ είναι ίσος με $-x_0$ cm²/sec, όπου x_0 η τετμημένη του ερωτήματος Δ1.

(Μονάδες 5)

Δ3. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(Μονάδες 5)

- Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχουν $\xi_1 > 1$ και $\xi_2 > 1$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + 1$.

(Μονάδες 6)