ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ’ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 253

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 191

Α3. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \qquad (1)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+x+\beta\right)=\beta$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+5\right)=5$
- $f(0)=\beta$

(1) $\boxed{\beta=5}$

Β2. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Για $\beta=5$, η f γράφεται

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+5, & x\le 0 \\ x+5, & x>0 \end{cases}$$

Οπότε, έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x2+x+\cancel{5}-\cancel{5}}{x}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\cdot(x+1)}{x}=1$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\cancel{5}-\cancel{5}}{x}=1$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $\boxed{f'(0)=1}$

Β3. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-1,\ +1)$ δίνεται απ' τον τύπο:

$(\varepsilon):\quad y-f(-1)=f'(-1)\big(x-(-1)\big)\qquad(1)$

Έχουμε λοιπόν:

$f(-1)=(-1)^2+(-1)+5=5$

Για $x<0$: $f'(x)=2x+1$, οπότε

$f'(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$

Επομένως,

(1) $(\varepsilon):\quad y-5=-1(x+1)$

$\boxed{(\varepsilon):\quad y=-x+4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κατ' αρχάς $D_f=[1,\ +\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

Έστω

$$
\begin{aligned}
A&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad x\in D_g\quad \kappa\alpha\iota\quad g(x)\in D_f\right\}\\
&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad x\neq 2\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{3-5x}{x-2}\geq 1\right\}\\
&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad x\neq 2\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{3-5x}{x-2}-1\geq 0\right\}\\
&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad x\neq 2\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{3-5x-(x-2)}{x-2}\geq 0\right\}\\
&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad x\neq 2\quad \kappa\alpha\iota\quad \frac{5-6x}{x-2}\geq 0\right\}\\
&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad x\neq 2\quad \kappa\alpha\iota\quad (5-6x)(x-2)\geq 0\quad \kappa\alpha\iota\quad x-2\neq 0\right\}\\
&=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad \frac{5}{6}\leq x<2\right\}\neq\varnothing
\end{aligned}
$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		2		$+\infty$
$5-6x$		+	0	−	‖	−	
$x-2$		−		−	0	+	
$(5-6x)(x-2)$		−	0	+	‖	−	

Επομένως, $D_{fog}=A=\left[\frac{5}{6},\ 2\right]$

Επίσης,

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{\frac{3-5x}{x-2}-1}=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}},\quad x\in\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

Γ2. Κατ’ αρχάς η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Παραγωγίζουμε την $\varphi(x)$ και έχουμε:

$$\varphi'(x)=\frac{\left(\frac{5-6x}{x-2}\right)'}{2\cdot\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\cdot\frac{-6(x-2)-(5-6x)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{x-2}}{2\cdot(x-2)^2\cdot\sqrt{5-6x}}>0\quad\text{για κάθε}\quad x\in\left(\frac{5}{6},\ 2\right).$$

Επομένως, η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{5}{6},\ 2\right)$, συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο $x_0=\frac{5}{6}$, τον αριθμό $\varphi\left(\frac{5}{6}\right)=0$.

Γ3. Κατ’ αρχάς $\varphi\uparrow\Rightarrow\varphi:\text{"1−1"}\Rightarrow$ η φ αντιστρέφεται.

Αρχικά,

$$D_\varphi=\left[\frac{5}{6},\ 2\right)\overset{\varphi:\ \text{συνεχής}}{\underset{\varphi\uparrow}{\Longrightarrow}}\varphi(D_\varphi)=\left[\varphi\left(\frac{5}{6}\right),\ \lim_{x\to2^-}\varphi(x)\right)=[0,\ +\infty)$$

αφού $\lim\limits_{x\to2^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}\cdot(5-6x)\right)}=+\infty$

Επομένως, $D_{\varphi^{-1}}=\varphi(D_f)=[0,\ +\infty)$

Για την εξίσωση της αντίστροφης, έχουμε:

Θέτω $\varphi(x)=y$

$$\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}=y\quad(y\geq0)$$

$$\frac{5-6x}{x-2}=y^2$$

$$5-6x=y^2\cdot x-2y^2$$

$y^2x+6x=5+2y^2$

$x\left(y^2+6\right)=5+2y^2$

$x=\dfrac{5+2y^2}{y^2+6},\ \ y\geq 0$

Άρα, $\boxed{\varphi^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+6},\qquad x\geq 0}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Η f είναι συνεχής στο $(0,\ \pi]$ ως ημιτονοειδής.
- Για τη συνέχεια της f στο $x_0=0$, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\to \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0\\ \to \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu=0\\ \to f(0)=0\end{array}\right\}\ f:\ \text{συνεχής στο } x_0=0$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $D_f=[-1,\ \pi]$

Βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση f' της f:

για $x\in[-1,\ 0)$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

για $x\in(0,\ \pi]$: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

για $x_0=0$, έχουμε:

$$\to \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\left(\begin{array}{l}\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ -x=u\Rightarrow x=-u\\ x\to 0^-\ \Rightarrow\ u\to 0^+\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{u}}{-u}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{u}}=-\infty\left(\notin\mathbb{R}\right)$$

Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα, $\boxed{x=0}$ κρίσιμο σημείο της f.

Αναζητούμε επίσης κρίσιμα σημεία, στα σημεία όπου η f' μηδενίζει.

Έχουμε λοιπόν:

Για $x\in[-1,\ 0)$, $\quad f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}<0$

Για $x\in(0,\ \pi]$, $\quad f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \overset{x\in(0,\pi]}{\Rightarrow} x=\frac{\pi}{2}$$

Άρα, $\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ κρίσιμο σημείο της f.

Δ2. Απ' τον πίνακα μονοτονίας της f, έχουμε:

x	-1		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$		−					
συνx				+	0	−	
f'		−		+	0	−	
f		↘		↗		↘	
	Τ.Μ		Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε

Μονοτονία: $f\uparrow \ /\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

$f\downarrow \ /\ x\in[-1,\ 0]\cup\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ τον αριθμό $f(-1)=1$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ τον αριθμό $f(0)=0$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=\frac{\pi}{2}$ τον αριθμό $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=\pi$ τον αριθμό $f(\pi)=0$.

Δ3. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,\ f(x0))$ έχει εξίσωση:
(ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\ \pi)$ τέτοιο ώστε:

Με (ε): $3-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\overset{x_0\in(0,\ 0)}{\Rightarrow}$

$3-\eta\mu x_0=\sigma\upsilon\nu x_0(-x_0)\overset{x_0\to x}{\Rightarrow}$

$x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+3=0$

Θεωρώ $g(x)=x\cdot συνx-ημx+3,\quad x\in[0,\ \pi]$

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,\ \pi)$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,\ \pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=3>0 \\ g(\pi)=-\pi+3<0 \end{array}\right\} g(0)\cdot g(\pi)<0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\ \pi)$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0)=0$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!