

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ – ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
& ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**ΘΕΜΑ Α**

- A1. α) Σχολικό Βιβλίο, σελ. 65.
β) Σχολικό Βιβλίο, σελ. 65.
γ) Σχολικό Βιβλίο, σελ. 65.
- A2. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 22.
- A3. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

- B1. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5 (περιττός αριθμός).

Οπότε, $\delta = 3^{\eta}$ παρατήρηση.

$$\text{Άρα, } 4\alpha - 1 = 15$$

$$4\alpha = 16$$

$$\boxed{\alpha = 4}$$

- B2. Για $\alpha = 4$, οι παρατηρήσεις είναι οι εξής:

12, 14, 15, 16, 18

Αρχικά, υπολογίζω τη μέση τιμή ($\bar{x}$):

$$\boxed{\bar{x}} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{i=1}^V ti = \frac{1}{9} \cdot (12 + 14 + 15 + 16 + 18) = \frac{1}{5} \cdot 75 = \boxed{15}$$

Για τη διακύμανση (s^2), έχουμε:

$$\begin{aligned} \boxed{s^2} &= \frac{1}{V} \cdot \sum_{i=1}^V (ti - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} \cdot [(12 - 15)^2 + (14 - 15)^2 + (15 - 15)^2 + (16 - 15)^2 + (18 - 15)^2] = \\ &= \frac{1}{5} \cdot (9 + 1 + 0 + 1 + 9) = \boxed{4} \end{aligned}$$

B3. Για $\alpha = 4$, οι παρατηρήσεις είναι οι εξής:

$$\text{Κατ' αρχάς: } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

Υπολογίζω το συντελεστή μεταβολής (C.V):

$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{15} > \frac{1}{10},$$

Επομένως το δείγμα των παραπάνω αριθμών δεν είναι ομοιογενές.

B4. Υπολογίζω τη νέα μέση τιμή ($\bar{y}$) και τη νέα τυπική απόκλιση (s_y):

$$\bar{y} = -2 \cdot \bar{x} + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$$

$$s_y = |-2| \cdot s = 2 \cdot 2 = 4$$

Οπότε, ο νέος συντελεστής μεταβολής ($C.V_y$) θα είναι:

$$(\bar{y} = -25 < 0):$$

$$C.V_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{25} = 0,16$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα ισχύει:

$$f'(1) = 0 \quad (\text{αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ταυτίζεται με την παράγωγο της } f \text{ στο } x_0 = 1)$$

$$\text{Όμως,} \quad f'(x) = 6x^2 - 6κx$$

$$\text{Οπότε:} \quad f'(1) = 0$$

$$6 \cdot 1^2 - 6κ \cdot 1 = 0$$

$$6 - 6κ = 0$$

$$-6κ = -6$$

$$\boxed{κ = 1}$$

Γ2. Κατ' αρχάς, για $κ = 1$, η f γράφεται:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\text{Έχουμε, λοιπόν:} \quad f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

Παρατηρώ ότι:

$$f''(x) = 0$$

$$12x - 6 = 0$$

$$12x = 6$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Οπότε, απ' τον πίνακα μονοτονίας της f' , παίρνουμε:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f''(x)$	↘		↗

Ο.Ε.

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$
(δηλ. η f') γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$

Γ2. Κατ' αρχάς, το σημείο επαφής είναι $(-1, f'(-1))$ δηλαδή $(-1, 12)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 6 + 6 = 12$$

Η εφαπτομένη της καμπύλης της f' στο σημείο της με $x = -1$, έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f''(-1)$.

$$\text{Όμως } f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -12 - 6 = -18$$

Επομένως, η εξίσωσή της είναι:

$$y = -18 \cdot x + \beta \quad (1)$$

Επειδή όμως το σημείο $(-1, 12)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$12 = -18 \cdot (-1) + \beta$$

$$12 = 18 + \beta$$

$$\beta = -6$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι: $(\varepsilon): y = -18x - 6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας την f , παίρνουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}} \cdot (x^2 + 4)' + 0 = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Δ2. $f'(x) = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

$$x = 0$$

Απ' τον πίνακα μονοτονίας της f (κι επειδή $\sqrt{x^2 + 4} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$), παίρνουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\bigcirc$	$\nearrow$

Ο.Ε.

- Μονοτονία:
- Η f είναι γνησίως αύξουσα ($\uparrow$) για $x \in [0, +\infty)$
 - Η f είναι γνησίως φθίνουσα ($\downarrow$) για $x \in (-\infty, 0]$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0 = 0$, την τιμή
 $f(0) = \sqrt{0^2 + 4} + 2018 = 2020$

Δ3. (α' τρόπος)

Παρατηρώ ότι:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{(\sqrt{x^2 + 4})^2} = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{x^2 + 4},$$

οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \cdot f'(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(x^2 + 4)} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{\cancel{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot (\sqrt{x^2 + 4} - 2)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - 2^2}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \cancel{4} - \cancel{4}}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot x}{\cancel{x} \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 4} + 2} = 0.$$

(β' τρόπος)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \cdot f'(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 2x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x^2 + 4) - 2x \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot [(x^2 + 4) - 2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}]}{x^{\cancel{2}} \cdot \sqrt{x^2 + 4}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(x^2 + 4) - 2\sqrt{x^2 + 4}] \cdot [(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot [(x^2 + 4) + 2\sqrt{x^2 + 4}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)^2 - [2\sqrt{x^2 + 4}]^2}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 8x^2 + 16 - 4(x^2 + 4)}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 8x^2 + \cancel{16} - 4x^2 - \cancel{16}}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^2}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (x^2 + 4)}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4 + 2\sqrt{x^2 + 4})} = \frac{0 \cdot 4}{2 \cdot (4 + 4)} = 0.$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!