ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ – ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ & ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α)** Σχολικό Βιβλίο, σελ. 65.

β) Σχολικό Βιβλίο, σελ. 65.

γ) Σχολικό Βιβλίο, σελ. 65.

Α2. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 22.

Α3. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5 (περιττός αριθμός).

Οπότε, δ = $3^{η}$ παρατήρηση.

Άρα, $4\alpha-1=15$

$4\alpha=16$

$\boxed{\alpha=4}$

Β2. Για $\alpha=4$, οι παρατηρήσεις είναι οι εξής:

12, 14, 15, 16, 18

Αρχικά, υπολογίζω τη μέση τιμή $(\overline{x})$:

$$\boxed{\overline{x}}=\frac{1}{V}\cdot\sum_{i=1}^{v}ti=\frac{1}{9}\cdot(12+14+15+16+18)=\frac{1}{5}\cdot 75=\boxed{15}$$

Για τη διακύμανση (s^2), έχουμε:

$$\boxed{s^2}=\frac{1}{V}\cdot\sum_{i=1}^{v}(ti-\overline{x})^2=\frac{1}{5}\cdot\left[(12-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot(9+1+0+1+9)=\boxed{4}$$

Β3. Για $\alpha = 4$, οι παρατηρήσεις είναι οι εξής:

Κατ' αρχάς: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

Υπολογίζω το συντελεστή μεταβολής (C.V):

$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{15} > \frac{1}{10},$$

Επομένως το δείγμα των παραπάνω αριθμών <u>δεν</u> είναι ομοιογενές.

Β4. Υπολογίζω τη νέα μέση τιμή $(\bar{y})$ και τη νέα τυπική απόκλιση (s_y):

$$\bar{y} = -2 \cdot \bar{x} + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$$
$$s_y = |-2| \cdot s = 2 \cdot 2 = 4$$

Οπότε, ο νέος συντελεστής μεταβολής ($C.V_y$) θα είναι:

$(\bar{y} = -25 < 0)$:

$$C.V_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,\ f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα ισχύει:

$f'(1) = 0$ (αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ταυτίζεται με την παράγωγο της f στο $x_0 = 1$)

Όμως, $f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$

Οπότε:

$$f'(1) = 0$$
$$6 \cdot 1^2 - 6\kappa \cdot 1 = 0$$
$$6 - 6\kappa = 0$$
$$-6\kappa = -6$$
$$\boxed{\kappa = 1}$$

Γ2. Κατ' αρχάς, για $\kappa = 1$, η f γράφεται:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

Έχουμε, λοιπόν: $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$$f''(x) = 12x - 6$$

Παρατηρώ ότι: $f''(x)=0$

$$12x-6=0$$
$$12x=6$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Οπότε, απ' τον πίνακα μονοτονίας της f', παίρνουμε:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ (δηλ. η f') γίνεται ελάχιστος για $x=\frac{1}{2}$

Γ3. Κατ' αρχάς, το σημείο επαφής είναι $\left(-1,\ f'(-1)\right)$ δηλαδή $(-1,\ 12)$.

$$f'(x)=6x^2-6x$$
$$f'(-1)=6\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)$$
$$=6+6$$
$$=12$$

Η εφαπτομένη της καμπύλης της f' στο σημείο της με $x=-1$, έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f''(-1)$.

Όμως $f''(-1)=12\cdot(-1)-6=-12-6=-18$

Επομένως, η εξίσωσή της είναι:

$$y=-18\cdot x+\beta \qquad (1)$$

Επειδή το σημείο $(-1,\ 12)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$12=-18\cdot(-1)+\beta$$
$$12=18+\beta$$
$$\beta=-6$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι: $\boxed{(\varepsilon): y=-18x-6}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας την f, παίρνουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+4}}\cdot(x^2+4)'+0=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Δ2. $f'(x)=0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0$$

$$x=0$$

Απ' τον πίνακα μονοτονίας της f (κι επειδή $\sqrt{x^2+4}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$), παίρνουμε:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Μονοτονία:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα ($\uparrow$) για $x\in[0,+\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα ($\downarrow$) για $x\in(-\infty,\ 0]$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=0$, την τιμή

$$f(0)=\sqrt{0^2+4}+2018=2020$$

Δ3. ***(α' τρόπος)***

Παρατηρώ ότι:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+4}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+4}}{x^2+4},$$

οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+4\right)\cdot f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\left(x^2+4\right)}\cdot\dfrac{x\cdot\sqrt{x^2+4}}{\cancel{x^2+4}}-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^{\cancel{2}}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\cancel{4}-\cancel{4}}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{\sqrt{0^2+4}+2}=0.$$

(β' τρόπος)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\cdot f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot(x^2+4)-2x\cdot\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot\left[(x^2+4)-2\cdot\sqrt{x^2+4}\right]}{x^{\cancel{2}}\cdot\sqrt{x^2+4}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x^2+4)-2\sqrt{x^2+4}\right]\cdot\left[(x^2+4)+2\sqrt{x^2+4}\right]}{x\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\left[(x^2+4)+2\sqrt{x^2+4}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)^2-\left[2\sqrt{x^2+4}\right]^2}{x\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x^2+4+2\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+8x^2+16-4(x^2+4)}{x\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x^2+4+2\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+8x^2+\cancel{16}-4x^2-\cancel{16}}{x\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x2+4+2\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+4x^2}{x\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x^2+4+2\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\cdot(x^2+4)}{\cancel{x}\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x^2+4+2\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x^2+4+2\sqrt{x^2+4}\right)}=\frac{0\cdot 4}{2\cdot(4+4)}=0.$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!