ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

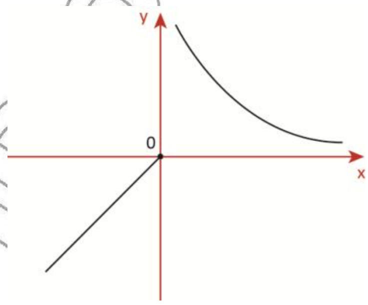
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

Α2. **α)** Ψευδής.

β) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι "1−1" αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

π.χ.: $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$



(Σχολικό βιβλίο, σελ. 35)

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=3$, δηλαδή

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$ (1)

Έχουμε λοιπόν:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2\alpha x+6)=6\alpha+6$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[-x^2+(3-\alpha)\cdot x+3\alpha\right]=-9+(3-\alpha)\cdot 3+3\alpha=0$
- $f(3)=6\alpha+6$

Οπότε, (1) $\rightarrow$ $6\alpha+6=0 \Rightarrow 6\alpha=-6 \Rightarrow \boxed{\alpha=-1}$

B2. Κατ' αρχάς για $\alpha=-1$, η f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6, & x\le 3\\ -x^2+4x-3, & x>3\end{cases}$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,\ 3)$ με $f'(x)=-2$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(3,\ +\infty)$ με $f'(x)=-2x+4$
- Στο $x_0=3$ ελέγχω την παραγωγισιμότητα της f με τον ορισμό, δηλαδή:
    - $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-2x+6-0}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-2\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=-2$
    - $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x^2+4x-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=-2$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ με $f'(3)=-2$.

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & x\le 3\\ -2x+4, & x>3\end{cases}$$

B3. Για κάθε $x>3$, έχουμε:

$f'(x)=0$

$-2x+4=0$

$x=2$

x	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
$-2x+4$	+ 0	−	−
$f'(x)$			−
$f(x)$			↘

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα (↓) στο $[3,\ +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{4 \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	‖	↗	

Μονοτονία f: $f \uparrow / x \in (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$

$f \downarrow / x \in [-2, 0)$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ τον αριθμό

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$$

Γ2. <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες:</u>

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

Οπότε η $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

<u>Οριζόντιες ασύμπτωτες:</u>

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$

<u>Πλάγιες ασύμπτωτες:</u>

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1 \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0 \in \mathbb{R}$

Επομένως, η $\boxed{y=x}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Ομοίως, η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Η ζητούμενη εφαπτομένη, έχει εξίσωση:

$(\varepsilon):\ y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$ $\qquad f(2)=1$

$(\varepsilon):\ y-1=2\cdot(x-2)$ $\qquad f'(2)=2$

$\boxed{(\varepsilon):\ y=2x-3}$

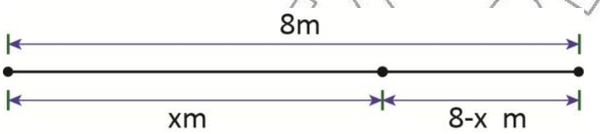
Γ4.

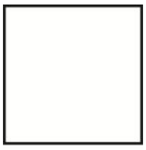
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-\frac{4}{x^2}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\frac{x^3-4-x^2}{x^2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4x}{3x^2-2x}=\frac{12-8}{12-4}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.





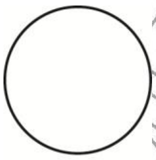
Σχ. 1

Η κάθε πλευρά του τετραγώνου ισούται με $\frac{x}{4}m$.

Οπότε, το εμβαδόν του είναι:

$$E_1(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}m^2$$

Το μήκος του κύκλου ισούται με $8-x\ \ m$.



Σχ. 2

Ισχύει, $L=2\pi R\Rightarrow 8-x=2\pi R\Rightarrow R=\frac{8-x}{2\pi}m$.

Οπότε, το εμβαδόν του είναι:

$$E_2(x)=\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2\ m^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=E_1(x)+E_2(x)=\frac{\pi x^2+4\cdot(64-16x+x^2)}{16\pi}=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}=$$

$$=\frac{(\pi+4)\cdot x^2-64x+256}{16\pi}m^2$$

Επειδή, το x εκφράζει μήκος, πρέπει:

$x>0$ και $8-x>0$

$x<8$

Οπότε, $x\in(0,\ 8)$

Δ2. Για κάθε $x\in(0,\ 8)$, έχουμε:

$$\mathrm{E}'(x)=\frac{2(\pi+4)\cdot x-64}{16\pi}=\frac{(\pi+4)\cdot x-32}{8\pi}$$

$$\mathrm{E}'(x)=0 \Rightarrow (\pi+4)\cdot x-32=0 \Rightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$\mathrm{E}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{E}(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Παρατηρώ, ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν $x=\dfrac{32}{\pi+4}\ m$.

Τότε έχουμε:

- Πλευρά τετραγώνου: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}m$
- Διάμετρος κύκλου: $\cancel{2}\cdot\dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\cancel{2}\pi}=\dfrac{\dfrac{8(\pi+\cancel{4}-\cancel{4})}{\pi+4}}{\pi}=\dfrac{8\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\cdot(\pi+4)}=\dfrac{8}{\pi+4}m$

Άρα, όταν $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Δ3. Αρκεί να δείξετε ότι μοναδικό $x\in(0,\ 8)$ τέτοιο ώστε: $\mathrm{E}(x)=5\ m^2$.

Παρατηρώ ότι:

$$\Delta_1=\left(0,\ \frac{32}{\pi+4}\right]\xrightarrow[\mathrm{E}(x)\downarrow]{\mathrm{E}(x):\text{συνεχής}} E(\Delta_1)=\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\ \lim_{x\to0^+}\mathrm{E}(x)\right)\quad(1)$$

$$\Delta_2=\left[\frac{32}{\pi+4},\ 8\right)\xrightarrow[\mathrm{E}(x)\uparrow]{\mathrm{E}(x):\text{συνεχής}} E(\Delta_2)=\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\ \lim_{x\to8^-}\mathrm{E}(x)\right)\quad(2)$$

- $$\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\cdot\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2-64\cdot\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\frac{\frac{32^2}{\pi+4}-\frac{64\cdot 32}{\pi+4}+256}{16\pi}=$$

$$=\frac{2^{10}-2^{11}+2^8(\pi+4)}{2^4\cdot\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{2^8\left(\cancel{4}-\cancel{8}+\pi+\cancel{4}\right)}{2^4\cdot\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\pi+4)\cdot x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}$$

- $$\lim_{x\to 8^-}\mathrm{E}(x)=\lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)\cdot x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{64[(\pi+4)-8+4]}{16\pi}=4\,.$$

Άρα, $E(\Delta_1)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$ και $E(\Delta_2)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$

Οπότε,

$5\in E(\Delta_1)$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $E(x_0)=5$, όμως $E\downarrow$ στο Δ_1, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Επίσης, $5\notin E(\Delta_2)$.

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!