ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

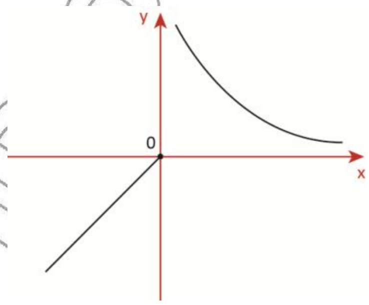
Α1. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 99

Α2. **α)** Ψευδής

β) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι "1–1" αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

π.χ.: $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

(Σχολικό Βιβλίο, σελ. 35)



Α3. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 216

Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, έχουμε:

$$f'(x)=1+\frac{4\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗	
			Τ.Μ.				

Μονοτονία f: $f \uparrow / x \in (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$

$f \downarrow / x \in [-2, 0)$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ τον αριθμό

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$$

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, έχουμε:

$$f''(x) = -\frac{8 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Οπότε, η f είναι κοίλη ($\frown$) στο $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, ενώ δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

Β3. Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$

Οπότε η $\boxed{x = 0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Οριζόντιες ασύμπτωτες:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$

Πλάγιες ασύμπτωτες:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1 \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0 \in \mathbb{R}$

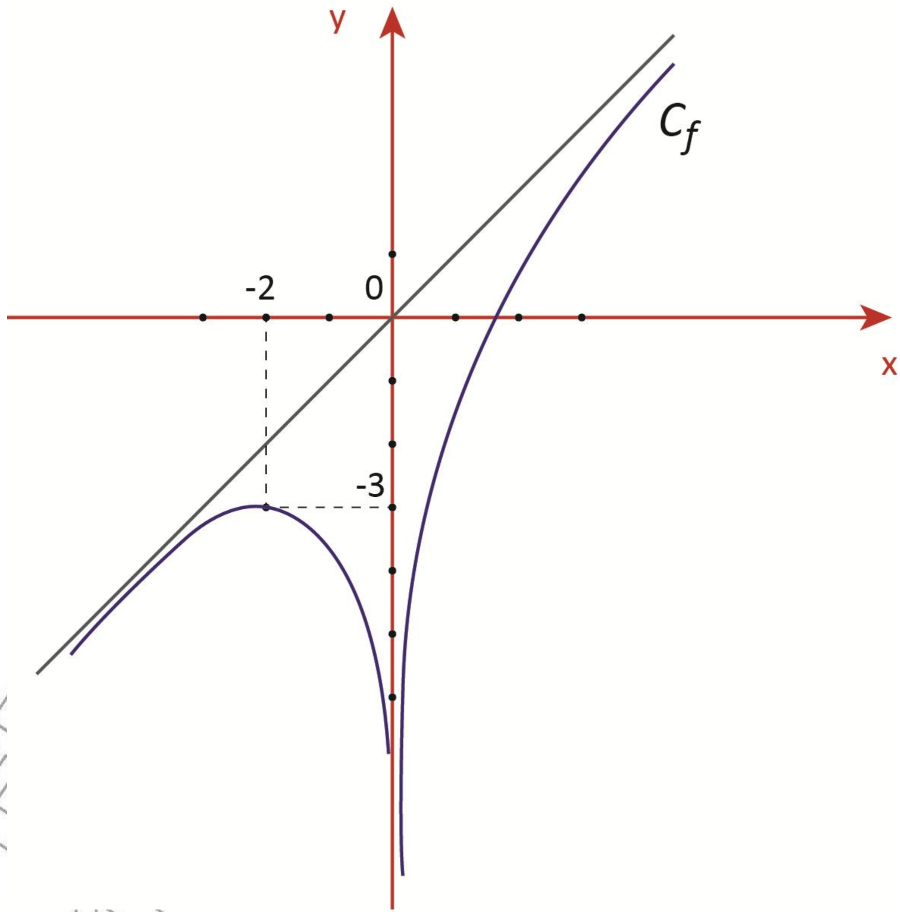
Επομένως, η $\boxed{y = x}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Ομοίως, η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. Υπολογίζω και την οριακή τιμή: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

Με βάση τα παραπάνω κατασκευάζω τον πίνακα μεταβολών:

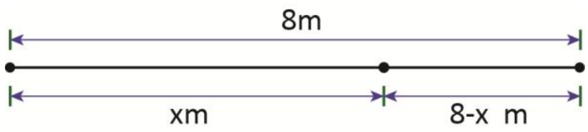
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	Τ.Μ. $(-2, -3)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

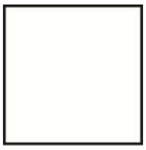
Η γραφική παράσταση της *f*, είναι:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.





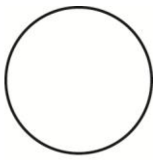
Σχ. 1

Η κάθε πλευρά του τετραγώνου ισούται με $\frac{x}{4}m$.

Οπότε, το εμβαδόν του είναι:

$$E_1(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}m^2$$

Το μήκος του κύκλου ισούται με $8-x\ \ m$.



Σχ. 2

Ισχύει, $L=2\pi R \Rightarrow 8-x=2\pi R \Rightarrow R=\frac{8-x}{2\pi}m$.

Οπότε, το εμβαδόν του είναι:

$$E_2(x)=\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 m^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=E_1(x)+E_2(x)=\frac{\pi x^2+4\cdot(64-16x+x^2)}{16\pi}=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}=$$

$$=\frac{(\pi+4)\cdot x^2-64x+256}{16\pi}m^2$$

Επειδή, το x εκφράζει μήκος, πρέπει:

$x>0$ και $8-x>0$

$x<8$

Οπότε, $x\in(0,\ 8)$

Γ2. Για κάθε $x\in(0,\ 8)$, έχουμε:

$$E'(x)=\frac{2(\pi+4)\cdot x-64}{16\pi}=\frac{(\pi+4)\cdot x-32}{8\pi}$$

$$E'(x)=0 \Rightarrow (\pi+4)\cdot x-32=0 \Rightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Παρατηρώ, ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν $x=\frac{32}{\pi+4}\ m$.

Τότε έχουμε:

- Πλευρά τετραγώνου: $\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}m$
- Διάμετρος κύκλου: $\cancel{2}\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\cancel{2}\pi}=\frac{\frac{8(\pi+\cancel{4}-\cancel{4})}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\cdot(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}m$

Άρα, όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$ η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι μοναδικό $x\in(0,\,8)$ τέτοιο ώστε: $\mathrm{E}(x)=5\ m^2$.

Παρατηρώ ότι:

$$\Delta_1=\left(0,\,\frac{32}{\pi+4}\right]\xrightarrow[\mathrm{E}(x)\downarrow]{\mathrm{E}(x):\text{συνεχής}}E(\Delta_1)=\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}\mathrm{E}(x)\right)\quad(1)$$

$$\Delta_2=\left[\frac{32}{\pi+4},\,8\right)\xrightarrow[\mathrm{E}(x)\uparrow]{\mathrm{E}(x):\text{συνεχής}}E(\Delta_2)=\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to8^-}\mathrm{E}(x)\right)\quad(2)$$

- $$\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{(\pi+4)\cdot\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2-64\cdot\frac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\frac{\frac{32^2}{\pi+4}-\frac{64\cdot32}{\pi+4}+256}{16\pi}=$$
$$=\frac{2^{10}-2^{11}+2^8(\pi+4)}{2^4\cdot\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{2^8(\cancel{4}-\cancel{8}+\pi+\cancel{4})}{2^4\cdot\pi\cdot(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}$$
- $$\lim_{x\to0^+}\mathrm{E}(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(\pi+4)\cdot x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}$$
- $$\lim_{x\to8^-}\mathrm{E}(x)=\lim_{x\to8^-}\frac{(\pi+4)\cdot x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{64[(\pi+4)-8+4]}{16\pi}=4.$$

Άρα, $E(\Delta_1)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$ και $E(\Delta_2)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$

Οπότε,

$5\in E(\Delta_1)$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $E(x_0)=5$, όμως $E\downarrow$ στο Δ_1, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Επίσης, $5\notin E(\Delta_2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$$

$$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow$

$2e^{x-\alpha} = 2 \Rightarrow$

$e^{x-\alpha} = e^0 \underset{\text{"1-1"}}{\overset{e^x}{\Rightarrow}}$

$x = \alpha$

$f''(x) > 0 \Rightarrow$

$2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Rightarrow$

$e^{x-\alpha} > 1 \Rightarrow$

$e^{x-\alpha} > e^0 \underset{\uparrow}{\overset{e^x}{\Rightarrow}}$

$x > \alpha$

$f''(x) < 0$

$2e^{x-\alpha} - 2 < 0 \Rightarrow$

$e^{x-\alpha} < 1 \Rightarrow$

$e^{x-\alpha} < e^0 \underset{\uparrow}{\overset{e^x}{\Rightarrow}}$

$x < \alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		Σ.Κ	

Επομένως, η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το $A(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, 2-\alpha^2)$

Δ2. Από Δ1.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

$$\Delta_1 = (-\infty, \alpha] \xrightarrow[f'\downarrow]{f'(x):\text{συνεχής}} f'(\Delta_1) = \left[f'(\alpha), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\right) = [2-2\alpha, +\infty)$$

$$\Delta_2 = [\alpha, +\infty) \xrightarrow[f'\uparrow]{f'(x):\text{συνεχής}} f'(\Delta_2) = \left[f'(\alpha), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) = [2-2\alpha, +\infty)$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) \overset{(+\infty)-(+\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[2x \cdot \left(\frac{e^{x-\alpha}}{x} - 1\right)\right] \overset{(*)}{=} +\infty$$

$$(*) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-\alpha}}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-\alpha}}{1} = +\infty$$

Όμως, $\alpha > 1 \Rightarrow -2\alpha < -2 \Rightarrow 2 - 2\alpha < 0$

$0 \in f'(\Delta_1)$, οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$, όμως $f' \downarrow / \Delta_1$, άρα x_1 μοναδικό,

$0 \in f'(\Delta_2)$, οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$, όμως $f' \uparrow / \Delta_2$,άρα x_2 μοναδικό.

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	
		Τ.Μ		Τ.Ε.	

$$(-\infty,\ \alpha]\begin{cases} x<x_1 \xrightarrow{f'\downarrow} f'(x)>f'(x_1) \to f'(x)>0 \\ x>x_1 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)<f'(x_1) \to f'(x)<0 \end{cases}$$

$$[\alpha,\ +\infty)\begin{cases} x<x_2 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)<f'(x_2) \to f'(x)<0 \\ x>x_2 \xrightarrow{f'\downarrow} f'(x)>f'(x_2) \to f'(x)>0 \end{cases}$$

Δ3. Παρατηρώ ότι: $f([\alpha,x_2]) \overset{f\downarrow/[\alpha,x_2]}{=} [f(x_2),f(\alpha)]=[f(x_2),2-\alpha^2]$.

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$f(1)>2-\alpha^2 \Leftrightarrow 2\cdot e^{1-\alpha}-1>2-\alpha^2 \Leftrightarrow 2\cdot e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$

Όμως, απ’ τη βασική ανισότητα:

$$\ln x \le x-1 \overset{x\to e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x \ge x+1 \underset{1-\alpha<0}{\overset{x\to 1-\alpha}{\Leftrightarrow}} e^{1-\alpha}>1-\alpha+1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>\alpha^2-2\alpha+1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>(\alpha-1)^2 \overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow} 2e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη.

Δ4. Για $\alpha=2$, η f γράφεται:

$f(x)=2e^{x-2}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x^2$

Βρίσκω την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(2,\ f(2))$

$(\varepsilon):\ y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$(\varepsilon):\ y+2=-2(x-2)$

$(\varepsilon):\ y=-2x+2$

Η f είναι ∪ στο $[2,\ +\infty)$ οπότε:

$f(x)\ge y$ για κάθε $x\in[2,\ +\infty)$.

Το $"="$ ισχύει μόνο για $x=2$.

Οπότε: $f(x)\ge -2x+2$

για $x\ge 2$: $f(x)\cdot\sqrt{x-2}\ge -2(x-1)\cdot\sqrt{x-2}$

Άρα: $\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}dx>\int_2^3 -2\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x-2}dx$ (1)

Όμως: $\int_2^3 -2(x-1)\cdot\sqrt{x-2}dx = -2\cdot\int_2^3 (x-1)\cdot\sqrt{x-2}dx =$

$$= \left(\begin{array}{ll} \text{Θέτω} & \sqrt{x-2}=u \\ & x-2=u^2 \\ & x=u^2+2 \\ & dx=2udu \\ x=2: & u=0 \\ x=3: & u=1 \end{array} \right) = -2\cdot\int_0^1 (u^2+2-1)u2udu = -4\cdot\int_0^1 (u^4+u^2)du =$$

$$= -4\cdot\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = -4\cdot\frac{8}{15} = -\frac{32}{15}$$

Άρα,

$$(1)\rightarrow \boxed{\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{5}}$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!