**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 28

**Α2.** **α.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 59

**β.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 59

**Α3.** **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $CV = \frac{s}{\overline{x}} \Rightarrow \overline{x} = \frac{s}{CV} \Rightarrow \overline{x} = \frac{2}{0,2} \Rightarrow \boxed{\overline{x} = 10}$

**Β2.** $\overline{x} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} \Rightarrow 10 = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} \Rightarrow 52+\kappa = 60 \Rightarrow \boxed{\kappa = 8}$

**Β3.** Διατάσσουμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά:

7, 8, 10, 11, 11, 13

Η διάμεσος (δ) του δείγματος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή:

$$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow \boxed{\delta = 10,5}$$

Το εύρος $(R)$ του δείγματος είναι:

*R = Μεγαλύτερη παρατήρηση – μικρότερη παρατήρηση*

$$R = 13 - 7 \Rightarrow \boxed{R = 6}$$

**B4.** Μετά την αφαίρεση κατά 2 από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος, προκύπτει ένα νέο δείγμα με

- μέση τιμή: $\bar{y} = \bar{x} - 2 \;\Rightarrow\; \bar{y} = 10 - 2 \;\Rightarrow \boxed{\bar{y} = 8}$
- τυπική απόκλιση: $s_y = s_x \;\Rightarrow \boxed{s_y = 2}$

Παρατηρώ ότι για το νέο δείγμα, ο συντελεστής μεταβολής γίνεται:

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} \;\Rightarrow\; CV_y = \frac{2}{8} \;\Rightarrow \boxed{CV_y = 25\%} > 10\%$$

οπότε το δείγμα των νέων τιμών <u>δεν</u> είναι ομοιογενές.

(Είναι προφανές ότι παραμένοντας σταθερά η τυπική απόκλιση και μειώνοντας τη μέση τιμή, προκύπτει συντελεστής μεταβολής μεγαλύτερος απ' τον αρχικό)!

## <u>ΘΕΜΑ Γ</u>

**Γ1.** Έχουμε, $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10}\right)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot \left(x^2 - 2x + 10\right)'$

$$= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{\cancel{2} \cdot (x - 1)}{\cancel{2} \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

**Γ2.** Επειδή $\sqrt{x^2 - 2x + 10} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f΄(x) | $-$ | 0 | $+$ |
| f(x) | ↘ | Ο.Ε. | ↗ |

Μονοτονία: $f \downarrow \;/\; x \in (-\infty,\ 1]$
$f \uparrow \;/\; x \in [1,\ +\infty)$

Η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x - 1$, επομένως:

$f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

**Γ3.** Κατ' αρχάς το σημείο επαφής είναι $\mathrm{M}(5, f(5))$ δηλαδή $\mathrm{M}(5, 5)$.

Η εφαπτομένη $\varepsilon$ της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\mathrm{M}(5, f(5))$, έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f'(5)=\frac{4}{5}$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι:

$$(\varepsilon):\ y=\frac{4}{5}\cdot x+\beta$$

Επειδή, το σημείο $\mathrm{M}(5,\ 5)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$5=\frac{4}{5}\cdot 5+\beta \quad \Rightarrow \quad \beta=1$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$\boxed{(\varepsilon):\ y=\frac{4}{5}\cdot x+1} \qquad (1)$$

**Γ4.** Για το σημείο τομής Α της εφαπτομένης ε με τον άξονα $x'x$, έχουμε:

$$(1) \xrightarrow{y=0} 0=\frac{4}{5}\cdot x+1 \Rightarrow \frac{4}{5}\cdot x=-1 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$$

οπότε $\boxed{\mathrm{A}\left(-\frac{5}{4}, 0\right)}$

Για το σημείο τομής Β της εφαπτομένης ε με τον άξονα $y'y$, έχουμε:

$$(1) \xrightarrow{x=0} y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Rightarrow y=1$$

οπότε $\boxed{\mathrm{B}(0,1)}$

## <u>ΘΕΜΑ Δ</u>

**Δ1.** Κατ' αρχάς, για $\lambda=3$ η $f$ γράφεται:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x, \qquad x\in\mathbb{R}$$

Παραγωγίζω τη συνάρτηση $f$ κι έχω:

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3\cdot\left(x^2-2x+1\right)=3\cdot(x-1)^2\geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει ΜΟΝΟ για $x=1$).

Επομένως, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρώ ότι:

$$\frac{3}{8} < \frac{5}{6} \overset{f\uparrow/\mathbb{R}}{\Rightarrow} \boxed{f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)}$$

**Δ2.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(x-1)^{\cancel{2}}\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)x\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{x\cdot\left[(\sqrt{x})^2-1^2\right]} = \lim_{x\to 1}\frac{3\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)}{x\cdot\cancel{(x-1)}} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{3\cdot 2}{1} = \boxed{6}$$

**Δ3.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ ισούται με $f'(x_0)$.

Για $\lambda=3$, παραγωγίζω τη συνάρτηση $f'(x)$ κι έχω:

$$f''(x) = 3\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(x-1)' = 6\cdot(x-1)$$

Από τον πίνακα μονοτονίας της $f'$, παίρνουμε:

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f'(x)$ | $\searrow$ | Ο.Ε. | $\nearrow$ |

Ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος όταν $x=1$.

Το ζητούμενο σημείο της γραφικής παράστασης της $f$ είναι το $(1, f(1))$ δηλαδή το $\boxed{(1,1)}$

**Δ4.** Παραγωγίζω τη συνάρτηση $f$ κι έχω:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$$

Παρατηρώ ότι η $f'$ είναι τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$. Οπότε για να μην παρουσιάζει ακρότατα η $f$ θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή:

$$\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda \leq 0 \;\Rightarrow\; 36 - 12\lambda \leq 0 \;\Rightarrow$$

$$-12\lambda \leq -36 \;\Rightarrow\; \lambda \geq 3$$

Επομένως, η ζητούμενη μικρότερη τιμή του $\lambda$, είναι:

$$\boxed{\lambda = 3}$$

## ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!