

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. α) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 15
β) i) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 35
ii) Σχολικό βιβλίο, σελίδες 35 – 36

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135

A4. α) Λάθος

Αιτιολόγηση:

Το αντίστοιχο θεώρημα ισχύει σε διάστημα κι όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(Σχολικό βιβλίο, σελίδα 134)

β) Λάθος

Αιτιολόγηση:

$$\text{Για τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2,$$

ενώ $f(1) = 3$.

A5. Σωστή απάντηση: **γ)** 4, αφού:

κατ' αρχάς, έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx \quad (1)$$

$$\text{Όμως, } E(\Omega_1) = 2 \xRightarrow{x \in [\alpha, \beta]} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 2$$

$$E(\Omega_2) = 1 \xRightarrow{x \in [\beta, \gamma]} \int_{\beta}^{\gamma} -f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = -1$$

$$E(\Omega_3) = 3 \xRightarrow{x \in [\gamma, \delta]} \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx = 3$$

Οπότε, η (1) γράφεται:

$$\int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx = 2 + (-1) + 3 = 4$$

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$, παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \lambda \right) = 2 \Rightarrow 0 + \lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

B2. Κατ' αρχάς, για $\lambda = 2$ η f γράφεται:

$$f(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Θεωρώ τη συνάρτηση } g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{δηλαδή } g(x) = e^{-x} - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$\bullet \left. \begin{aligned} g(2) &= e^{-2} > 0 \\ g(3) &= e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(2) \cdot g(3) < 0$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0) = 0$.

Παρατηρώ ότι $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα x_0 της g είναι μοναδική.

B3. Κατ' αρχάς, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Παραγωγίζω την f κι έχω: $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και "1-1".

Για το σύνολο τιμών της f :

$$A = \mathbb{R} \xrightarrow[f \downarrow]{f: \text{συνεχής}} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 2 \right) = +\infty$$

(αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 2 \right) = 2$$

$$(1) \rightarrow f(A) = (2, +\infty)$$

Για την εύρεση της f^{-1} , έχω:

$$\text{Θέτω } f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$e^{-x} + 2 = y$$

$$e^{-x} = y - 2$$

$$-x = \ln(y - 2)$$

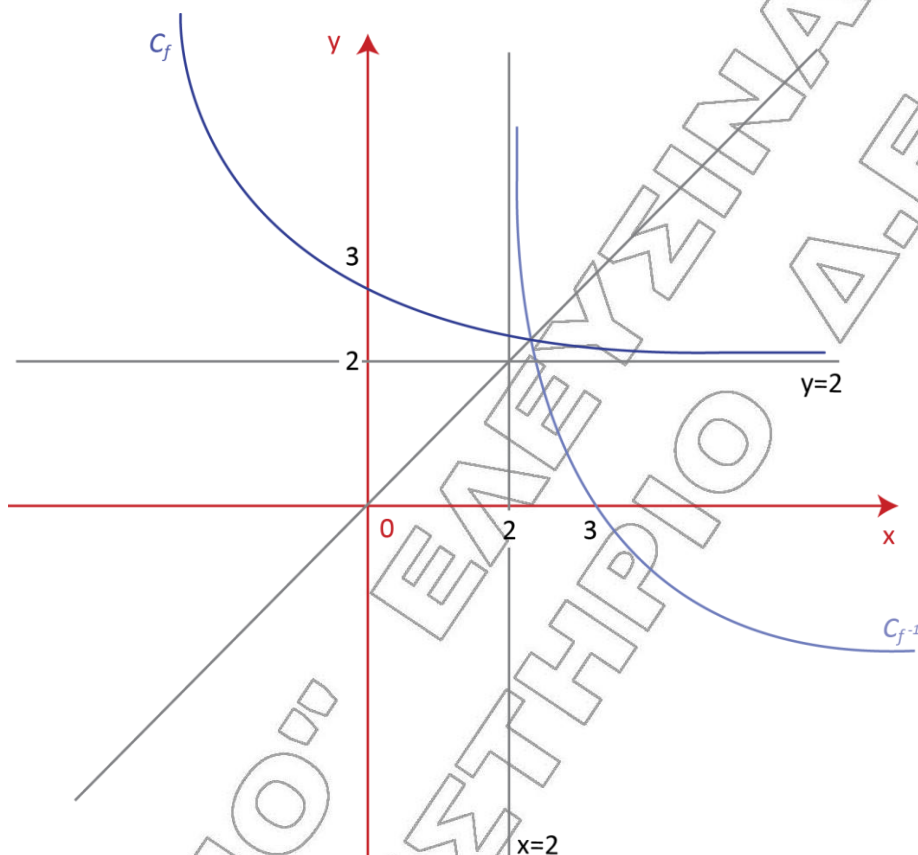
$$x = -\ln(y - 2)$$

$$\text{Επομένως, } f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), \quad x \in (2, +\infty)$$

B4. Για την κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$, έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x-2)] = \left(\begin{array}{l} \text{Θέτω } x-2=u \\ x \rightarrow 2^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \end{array} \right) = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty$$

Οπότε, η $x=2$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσμη θα είναι και συνεχής στο $A=\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και συνεχής στο $x_0=1$, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha \\ f(1) = 1 + \alpha \end{array} \right\} (1) \rightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha \Rightarrow \boxed{\beta = \alpha} \quad (2)$$

Επίσης, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} (\in \mathbb{R}) \quad (3)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + \alpha)}{x - 1} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + \beta)}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta \end{aligned}$$

$$\bullet \quad = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\text{Οπότε,} \quad (3) \rightarrow 1 + \beta = 2 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

$$(2) \rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Γ2. Κατ' αρχάς, για $\alpha = \beta = 1$, η f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

Παραγωγίζω την f κι έχω:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x < 1 \end{cases} \quad (\text{από } \Gamma 1. \text{ έχουμε } f'(1) = 2)$$

Παρατηρώ ότι

$$\begin{cases} 2x > 0, & \text{για κάθε } x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1 > 0, & \text{για κάθε } x < 1 \end{cases}$$

Επομένως, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$$A = \mathbb{R} \xrightarrow[f \uparrow]{f: \text{συνεχής}} f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \quad (4)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{Οπότε,} \quad (4) \rightarrow \boxed{f(A) = \mathbb{R}}$$

Γ3. i) Παρατηρώ ότι:

$$A_1 = (-\infty, 0) \xrightarrow[f \uparrow]{f: \text{συνεχής}} f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) \quad (5)$$

$$\text{όμως, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x-1} + x) = \frac{1}{e}$$

$$\text{οπότε, } (5) \rightarrow f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right)$$

Έχουμε, λοιπόν:

$0 \in f(A_1)$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Όμως $f \uparrow / \mathbb{R}$ οπότε, η ρίζα x_0 θα είναι μοναδική.

ii) Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0, \text{ δηλαδή}$$

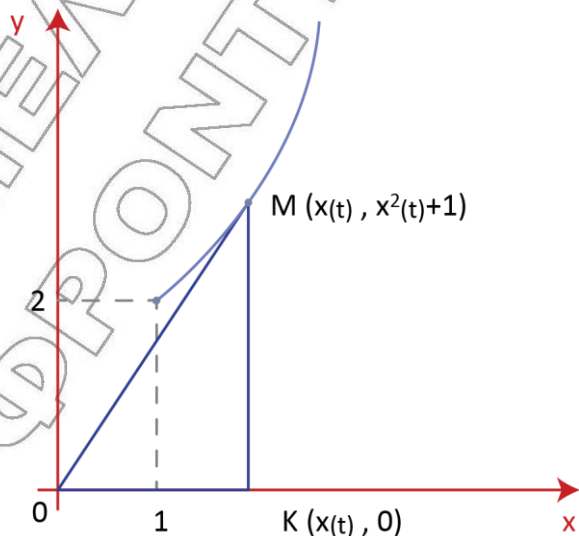
$$f(x) = 0 \quad (6) \quad \text{ή} \quad f(x) = x_0 \quad (7)$$

Η (6) είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ αφού από (i) η f έχει μοναδική ρίζα τη x_0 .

Η (7) είναι επίσης αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$, αφού για

$$x > x_0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0 \text{ δηλαδή η } f \text{ παίρνει θετικές τιμές} \\ \text{όταν } x \in (x_0, +\infty) \text{ ενώ } x_0 \in (-\infty, 0).$$

Γ4.



$$\text{Κατ' αρχάς παρατηρώ ότι } (\text{ΜΟΚ}) = \frac{\text{ΟΚ} \cdot \text{ΚΜ}}{2} = \frac{x(t) \cdot (x^2(t) + 1)}{2} = \frac{1}{2}(x^3(t) + x(t))$$

Απ' τα δεδομένα της άσκησης, παίρνουμε:

$$x(t_0) = 3, \quad x'(t_0) = 2 \text{ μον./sec}$$

Για το εμβαδόν του ΜÔΚ, έχουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2}(x^3(t) + x(t)), \quad t: \text{sec}, \quad E: \text{μονάδες}^2$$

Για το ρυθμό μεταβολής του παραπάνω εμβαδού παίρνω:

$$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)) = \frac{x'(t)}{2} \cdot (3x^2(t) + 1)$$

Οπότε, για $t = t_0$:

$$E'(t_0) = \frac{2}{2} \cdot (3 \cdot 3^2 + 1) = 28 \text{ τ.μον./sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού, η $(\varepsilon): y = -x + 2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο της $A(1, 1)$, θα ισχύουν:

$$(\Sigma) \begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases}$$

Όμως,

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \alpha = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

Επομένως, το (Σ) γράφεται:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Δ2. Κατ' αρχάς για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$, η f γράφεται:

$$f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$$

Θεωρώ

$$h(x) = f(x) - y, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 - x - (-x + 2) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$= (x-1) \cdot \ln[(x-1)^2 + 1]$$

Παρατηρώ ότι για κάθε $x \in [1, 2]$ $h(x) \geq 0$, αφού:

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq (x-1)^2 + 1 \leq 2$$

$$\stackrel{\ln x \uparrow}{\Rightarrow} 0 \leq \ln[(x-1)^2 + 1] \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x-1) \cdot \ln[(x-1)^2 + 1] \leq \ln 2$$

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2} \right)' \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 2x + 2) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) \cdot \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} (2\ln 2 - 0) - \frac{1}{2} \left[(x-1)^2 \right]_1^2 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \text{τ.μ} \end{aligned}$$

Δ3. i) Παρατηρώ ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq -1 &\Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \\ &\Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0 \quad \text{που αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(Η ισότητα ισχύει ΜΟΝΟ για $x=1$).

ii) Έχουμε λοιπόν:

$$f: \text{συνεχής στο } \left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2} \right]$$

$$f: \text{παραγωγίσιμη στο } \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2} \right)$$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2} \right) \text{ τέτοιο ώστε:}$$

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = 2 \cdot \left(f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \right)$$

όμως από (i) $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow 2 \cdot \left(f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \right) \geq -1$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Δ4. Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g αντίστοιχα.

Για την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A , έχουμε

$$(\varepsilon_1): y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \Rightarrow (\varepsilon_1): y = f'(x_1) \cdot x + (f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1))$$

$$(\varepsilon_2): y - g(x_2) = g'(x_2) \cdot (x - x_2) \Rightarrow (\varepsilon_2): y = g'(x_2) \cdot x + (g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2))$$

Για να ταυτίζονται οι (ε_1) και (ε_2) , πρέπει:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) & (1) \\ f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1) = g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2) & (2) \end{cases}$$

Από **Δ3. i.** $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει ΜΟΝΟ για $x=1$, ενώ για τη συνάρτηση g , έχουμε:

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $g'(x) = -3x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x) = -6x$.

Απ' τον πίνακα μονοτονίας της g'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$g'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Ο.Μ.

παρατηρούμε ότι η g' παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x=0$, οπότε:

$g'(x) \leq g'(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $g'(x) \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει ΜΟΝΟ για $x=0$.

Συνεπώς, η (1) αληθεύει μόνο για $x_1=1$ και $x_2=0$.

Παρατηρούμε ότι για τις παραπάνω τιμές αληθεύει και η εξίσωση (2), αφού:

$$f(1) - 1 \cdot f'(1) = g(0) - 0 \cdot g'(0) \Leftrightarrow 1 - (-1) = 2$$

Η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης, είναι:

$$(\varepsilon): y = f'(1) \cdot x + (f(1) - 1 \cdot f'(1)) \Rightarrow \boxed{(\varepsilon): y = -x + 2}$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!