ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω $x+1=u \Rightarrow x=u-1$, αντικαθιστώ στη δοσμένη κι έχω:

$$f(u)=u\cdot e^{1-u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x)=x\cdot e^{1-x},\ \ x\in\mathbb{R}}$$

Β2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε:

$$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}\cdot(1-x)$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	Ο.Μ.	↘	

Μονοτονία: $f\uparrow / x\in(-\infty,1]$ και $f\downarrow / x\in[1,+\infty)$

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x=1$ την τιμή $\max f=f(1)=1$.

B3. Έχουμε:

$$f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x}\cdot(1-x+1) = e^{1-x}(x-2)$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Κυρτότητα: $f \frown / x\epsilon(-\infty, 2]$ και $f \smile / x\epsilon[2, +\infty]$

Η f παρουσιάζει καμπή για $x=2$ το σημείο $\mathrm{A}(2, f(2))$, δηλαδή $\mathrm{A}\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

Η f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$, οπότε δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Παρατηρώ ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Οπότε, η $\boxed{y=0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επίσης:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

Οπότε, η C_f δεν παρουσιάζει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. **(i)** Κατ' αρχάς, έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right) \overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=} -\infty$$

Παρατηρώ ότι:

$$\Delta_1 = (-\infty, 1] \underset{f\uparrow}{\overset{f:\text{συνεχής}}{\rightarrow}} f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$

$$\Delta_2 = (1, +\infty] \underset{f\downarrow}{\overset{f:\text{συνεχής}}{\rightarrow}} f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right] = (0, 1)$$

Οπότε, $\boxed{f(D_f) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]}$

ii)

- Αν $\lambda \in (-\infty, 0]$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς 1 ρίζα, αφού:

  $\lambda \in f(\Delta_1) \Rightarrow$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \Delta_1 : f(x_1)=\lambda$ όμως $f \uparrow / \Delta_1$, οπότε x_1 : μοναδικό.

- Αν $\lambda \in (0,1)$, τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς 2 ρίζες αφού:

  $\rightarrow$ $\lambda \in f(\Delta_1) \Rightarrow$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \Delta_1 : f(x_1)=\lambda$ όμως $f \uparrow / \Delta_1$, οπότε x_1 : μοναδικό.

  $\rightarrow$ $\lambda \in f(\Delta_2) \Rightarrow$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \Delta_2 : f(x_2)=\lambda$ όμως $f \downarrow / \Delta_2$, οπότε x_2 : μοναδικό.

- Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς 1 ρίζα την $x=1$.

- Αν $\lambda \in (1, +\infty)$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Συνοψίζοντας, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς:

0 ρίζες, αν $\lambda \in (1, +\infty)$

1 ρίζα, αν $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [1]$

2 ρίζες, αν $\lambda \in (0, 1)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κατ' αρχάς η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική και

η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Στο $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f : \textit{συνεχής στο } x_0 = 0$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $D_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Για την παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 0$, έχω:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{\cancel{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Παρατηρώ ότι:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, επομένως, η f είναι μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. **i)**

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ (από Γ1.)
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$
- $f(0)=1,\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

οπότε $f(0)\neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Επομένως, η f δεν ικανοποιεί και τις τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ii) Έχουμε,

$f'(\xi)=0$

$-\eta\mu\xi=0$

$\eta\mu\xi=0$

κι επειδή $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$, τότε $\xi=\pi$.

Γ3. Αρκεί να δείξω ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x<0$.

Έχουμε λοιπόν, για $x<0$:

$f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$

Για το παραπάνω τριώνυμο, έχω:

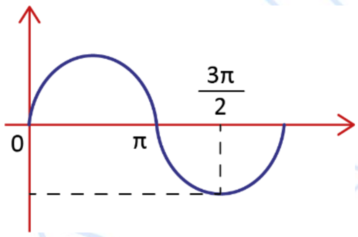
$\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\alpha\cdot(-1)=36+12\alpha=12\cdot(\alpha+3)<0$ αφού $\alpha<-3$

Επομένως, στη C_f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Παρατηρώ ότι:

- $x<0$: $f'(x)<0$ (από **Γ2. (ii)**) οπότε $f\downarrow / x\in(-\infty,0]$
- $0<x<\frac{3\pi}{2}$: $f'(x)=-\eta\mu x$, οπότε:

x	0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	



Επομένως,

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pi$, άρα

$f(x)\geq f(\pi)$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

$f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ $\kappa(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>0$

- $\kappa(x)$ συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $\kappa(1)\cdot\kappa(e)<0$, αφού $\kappa(1)=-1<0$ και $\kappa(e)=1-\frac{1}{e}>0$

Επομένως, απ' το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}$

Όμως, για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\kappa'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

Δηλαδή η $\kappa(x) \uparrow / (0, +\infty)$, επομένως το x_0 θα είναι μοναδικό.

Δ2. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων κι έχουμε:

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \underset{\Delta_1}{\overset{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{=}} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}, \; x > 0$$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Επομένως, η f παρουσιάζει στο $x = x_0$ (ολικό) ελάχιστο το

$$f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \cdot \ln x_0 + \cancel{\ln x_0} - \cancel{\ln x_0} - 1 \overset{\Delta 1}{=} x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3. Για τις κοινές λύσεις των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h, λύνω την εξίσωση:

$$g(x) = h(x) \quad (1).$$

Κατ' αρχάς, παρατηρώ ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως, για να έχει λύση η (1) πρέπει $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε, για κάθε $x > 0$ έχω:

$g(x)=h(x) \Leftrightarrow$

$x \cdot e^{-x} = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$

$\ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\cdot \ln \dfrac{x_0}{e} \Leftrightarrow$

$\ln x - x = (x+1)\cdot \ln x_0 - (x+1) \Leftrightarrow$

$\ln x - x = (x+1)\cdot \ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow$

$\ln x_0 (x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$f(x)=0 \overset{\Delta 2}{\Leftrightarrow}$

$\boxed{x = x_0}$

Επομένως, οι C_g, C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη x_0.

Επίσης, παρατηρώ ότι:

$g'(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot(1-x)$

$h'(x) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln \dfrac{x_0}{e} = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot (\ln x_0 - 1)$

Όμως, $g'(x_0) = e^{-x_0}(1-x_0) = g(x_0)\left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right)$ (2) και

$h'(x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1) \overset{\Delta 1}{=} h(x_0)\left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right)$ (3)

κι επειδή, $g(x_0) = h(x_0)$ από (2), και (3), προκύπτει $g'(x_0) = h'(x_0)$

Επομένως, οι C_g και C_h έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο.

Δ4. Θεωρώ $d(x) = f(x) - f(x)$, $x>0$

<u>1η περίπτωση</u>

Αν η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

- $x_0 \in (0, +\infty)$
- η d παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = x_0$
- η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat:

$d'(x_0)=0$

$f'(x_0)=\varphi'(x_0)$

$\varphi'(x_0)=0$

Επομένως, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

<u>2η περίπτωση</u>

Αν η φ <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!