ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κατ’ αρχάς,

$$\begin{aligned} Dh &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_g \ \ \mu\varepsilon \ \ g(x) \in D_f\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \ \ \mu\varepsilon \ \ \sqrt{x} \leq 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0 \ \ \mu\varepsilon \ \ x \leq 1\right\} \\ &= [0,1] \, (\neq \varnothing) \end{aligned}$$

Έχουμε,

$$h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, \quad x \in [0,1].$$

Β2. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική κι έχω:

$$h'(x) = 2\cdot(x-1) < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0,1)$$

Επομένως, $h \downarrow /[0,1]$, άρα η h είναι "1–1".

$$D_h = [0,1] \xrightarrow[h\downarrow]{h:\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma} h(D_h) = [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Θέτω $h(x)=y \Leftrightarrow x=h^{-1}(y)$

$(x-1)^2=y$

$|x-1|=\sqrt{y}$

$1-x=\sqrt{y} \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon} \quad x\in[0,1])$

$x=1-\sqrt{y}$

Επομένως, $\boxed{h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, \quad x\in[0,1]}$

Β3. Έχουμε,

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} &, \quad x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2} &, \quad x=1 \end{cases}$$

i) Κατ' αρχάς, η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$

δηλαδή η φ είναι συνεχής στο $x=1$

Άρα, η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$

Παρατηρώ ότι $\varphi(0)=1\neq\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$,

άρα για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Έχουμε $\quad \dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2} \underset{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{\eta\mu x\uparrow}{\Leftrightarrow}}$

$$\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$$

Παρατηρώ ότι $\varphi(1)<\eta\mu\alpha<\varphi(0)$ επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για τη συνάρτηση φ στο $[0,1]$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- $x<-1: \quad f'(x)=-2$

  $$f'(x)=(-2x)'$$

  Οπότε, από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής, έχω:

  $f'(x)=-2x+c_1$

- $x>-1: \quad f'(x)=3x^2-1$

  $$f'(x)=(x^3-x)'$$

  Οπότε, από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής, έχω:

  $f(x)=x^3-x+c_2$

  $O(0,0)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=0 \Leftrightarrow c_2=0$

  Έχουμε λοιπόν:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+c_1 & , \quad x<-1 \\ x^3-x & , \quad x>-1 \end{cases}$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x=-1$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

$2+4=0=f(-1)$

$c_1=-2 \ , \ f(-1)=0$

Άρα,

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} -2x-2 & , \quad x\le -1 \\ x^3-x & , \quad x>-1 \end{cases}}$$

Γ2. Έστω $(\varepsilon):\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης.

$$(\varepsilon):\ y-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(x-x_0) \quad (1)$$

Έχουμε,

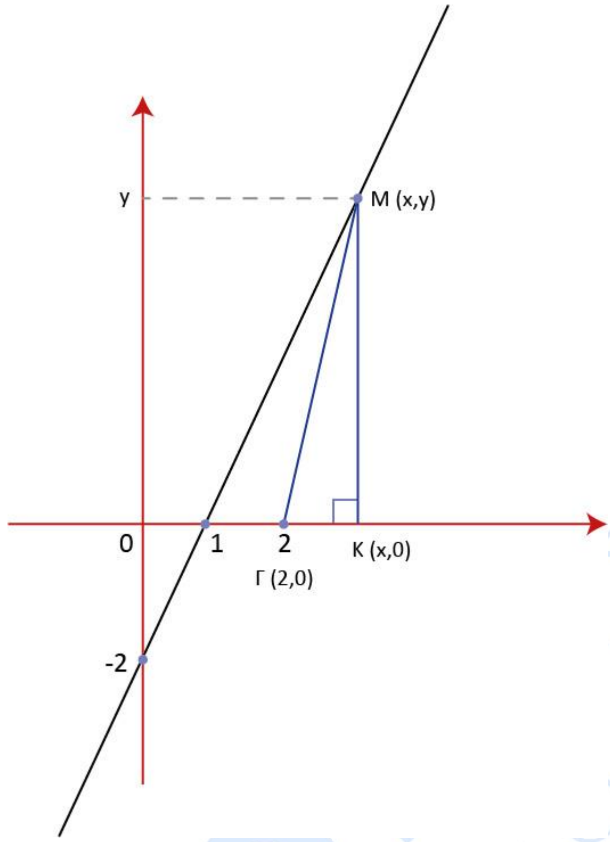
$(0,-2)\in(\varepsilon):\ -2-x_0^3+x_0=-3x_0^3+x_0$

$$2x_0^3=2$$

$$x_0=1$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης, είναι: $\boxed{(\varepsilon):\ y=2x-2}$

Γ3.



Έχουμε, $x(t_0)=3\mu o\nu.$, $y(t_0)=4\mu o\nu.$, $x'(t_0)=2\mu o\nu./\delta\varepsilon\upsilon\tau.$

Παρατηρώ ότι,

$$\mathrm{E}=(\mathrm{MK\Gamma})=\frac{1}{2}\Gamma\mathrm{K}\cdot\mathrm{KM}=\frac{1}{2}\cdot(x-2)\cdot y \underset{x>2}{\overset{y=2x-2}{=}} \frac{1}{2}\cdot(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)$$
$$=x^2-3x+2$$

Οπότε, $E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$, $x(t)>2$

Έχουμε, $E'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$

$$E'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2$$

$$\boxed{E'(t_0)=6\ \tau.\mu./\delta\varepsilon\upsilon\tau.}$$

Γ4. Έχουμε, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\mathrm{l}_1+\mathrm{l}_2$

- $$\mathrm{l}_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\left(\begin{array}{l}\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ f(x)=\frac{1}{u} \Leftrightarrow u=\frac{1}{f(x)}\\ x\to-\infty\quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon\quad u\to 0\end{array}\right)=\lim_{u\to 0}\left(u\cdot\eta\mu\frac{1}{u}\right)=0$$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-2x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{-2-\dfrac{2}{x}}\right]\overset{0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{=}0$

- $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=\begin{pmatrix}\text{Θέτω } u=-x\\ x\to-\infty\ \Rightarrow\ u\to+\infty\end{pmatrix}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{1+u^3}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3-u}{1+u^3}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{u^3}=1$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]\overset{0+1}{=}\boxed{1}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

Έχουμε, λοιπόν:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	
			Ο.Ε.		

Παρατηρώ ότι:

$\Delta_1=(0,1)\underset{f\downarrow}{\overset{f:\text{συνεχής}}{\longrightarrow}}f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(1-\ln3,+\infty)$,

αφού $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=1-\ln3\ (<0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln3x)\overset{0-(-\infty)}{=}+\infty$

$0\in f(\Delta_1)$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$, όμως $f\downarrow/\Delta_1$, οπότε το x_1 είναι μοναδικό.

$\Delta_2=(1,+\infty)\underset{f\uparrow}{\overset{f:\text{συνεχής}}{\longrightarrow}}f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1-\ln3,+\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1-\ln 3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(3x)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right]$$

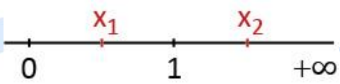
αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x)}{x}\underset{L'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{3x}}{1}=0$

$0\in f(\Delta_2)$, επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$, όμως $f\uparrow/\Delta_2$, οπότε το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

ii) Παρατηρώ ότι $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, επομένως, η f είναι κυρτή.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



$$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx \quad (1)$$

Παρατηρώ ότι

- $x_1\le x(\le 1)\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)\le f(x_1)\Rightarrow f(x)\le 0$
- $1\le x\le x_2\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)\le f(x_2)\Rightarrow f(x)\le 0$

Επομένως, $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[x_1, x_2]$

Οπότε,

(1) → $E=\int_{x_1}^{x_2}-f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\ln(3x)-x\right)dx$

$=\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx-\int_{x_1}^{x_2}x\,dx$

$=I_1-I_2$

Παρατηρώ ότι: $f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1 \quad (1)$

και $f(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2-\ln(3x_2)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_2)=x_2 \quad (2)$

Έχουμε, λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int_{x_1}^{x_2} ln(3x)dx &= \int_{x_1}^{x_2} (x)' \cdot \ln 3x\,dx = [x \cdot \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{3}{3x}dx \\
&= x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - [x]_{x1}^{x2} \\
&\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - (x_2 - x_1) \\
&= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) \\
&= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1)
\end{aligned}
$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2}$$

Άρα, $\boxed{E} = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1) - \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} \boxed{= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)}$

Δ3. Από **Δ2**, έχουμε: $x_1 + x_2 - 2 > 0 \quad (αφού \quad E > 0 \quad και \quad x_2 > x_1)$

$$2 - x_1 < x_2 \quad (3)$$

όμως

$$x_1 < 1 \iff -x_1 > -1 \iff 2 - x_1 > 1 \quad (4)$$

Οπότε, απ' τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$$1 < 2 - x_1 < x_2$$

κι αφού $f \uparrow / [1, +\infty)$ $\quad f(2 - x_1) < f(x_2) \iff \boxed{f(2 - x_1) < 0}$

Δ4. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$
\begin{aligned}
&2f(x) + \ln 3 - 1 = f'(x_2)(x - x_2) \iff \\
&f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = (1 - \ln 3) - f(x) \quad (5)
\end{aligned}
$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2, f(x_2))$, έχει εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon):\ y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \\
&(\varepsilon):\ y = f'(x_2)(x - x_2)
\end{aligned}
$$

κι επειδή η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ θα ισχύει:

$$f(x) \geq y \iff f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \iff f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$, όπου η ισότητα αληθεύει ΜΟΝΟ για $x = x_2$

Επίσης, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ οπότε:

$$f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 1-\ln 3 \Leftrightarrow 1-\ln 3-f(x)\leq 0$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$, όπου η ισότητα αληθεύει ΜΟΝΟ για $x=1$

Επειδή $x_2>1$, η εξίσωση (5) είναι ΑΔΥΝΑΤΗ!

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!

ΘΕΜΕΛΙΟ ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε.