ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 06 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 128

Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κατ' αρχάς,

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_h \text{ με } h(x)\in Dg\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ με } \ln x\in\mathbb{R}\}$$
$$=(0,+\infty)$$

Επίσης, $f(x)=(goh)(x)=g(h(x))=\dfrac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-x^2}{x},\ x>0$

Β2. **i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως ρητή και για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2}=\frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=-\frac{x^2+4}{x^2}<0$$

Επομένως, $f\downarrow/x\in(0,+\infty)$

ii) Παρατηρώ ότι:

$$\pi>e \underset{x\in(0,+\infty)}{\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}} f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow$$

$$\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e} \overset{\cdot\frac{\pi}{4-e^2}<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}}$$

Β3. <u>Κατακόρυφες:</u>

Παρατηρώ ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(4-x^2\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot 4}{=} +\infty$$

Επομένως, η ευθεία $\boxed{x=0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

<u>Πλάγιες</u>:

Παρατηρώ ότι $f(x)=\frac{4}{x}-x$ $^{(1)}$, $x>0$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

Επομένως, η ευθεία (ε): $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right]$$

Παρατηρώ για κάθε $x>0$:

$$\left|\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| = \left|\frac{x}{4-x^2}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right| \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

Οπότε,

$$-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \le \frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right) \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

Όμως, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left[-\left|\frac{x}{4-x^2}\right|\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left|\frac{x}{4-x^2}\right|\right] = 0$

Επομένως, απ' το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right]=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε: $\int_2^3 x f(x)dx = 1$

$$\int_2^3 x\cdot\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1$$

$$\int_2^3 (1+\alpha\cdot x)dx = 1$$

$$\left[x+\frac{\alpha\cdot x^2}{2}\right]_2^3 = 1$$

$$\left(3+\frac{9\alpha}{2}\right)-(2+2\alpha) = 1$$

$$1-\frac{5\alpha}{2} = 1$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

Γ2. Για $\alpha = 0$, η f, γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$$

i) Παρατηρώ ότι:

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = -1$$

- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = -\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x-1}}{x\cdot\cancel{(x-1)}} = -1$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1$, άρα ορίζεται εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 = 1$.

ii) Για τη ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης, έχουμε:

$$(\varepsilon):\ y-f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$$

$$(\varepsilon):\ y-1 = -1\cdot(x-1)$$

$\boxed{(\varepsilon):\ y=-x+2}$

Για τη ζητούμενη γωνία:

$\alpha=-1$

$\varepsilon\varphi\omega=-1$

και επειδή $\omega\in[0,\pi)$, τότε $\boxed{\omega=\frac{3\pi}{4}\text{rad}}$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$ και έχουμε:

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x<1\\ -\frac{1}{x^2}, & x>1\\ -1, & x=1\end{cases}=\begin{cases}2x-3, & x<1\\ -\frac{1}{x^2}, & x\geq 1\end{cases}$$

Παρατηρώ ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)<0$

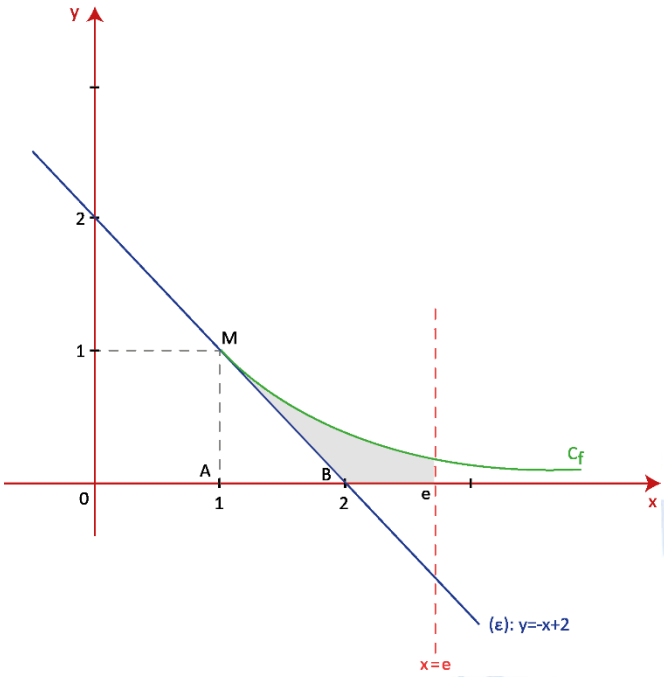
αφού $2x-3<0$ για $x<1$ και $-\frac{1}{x^2}<0$ για $x\geq 1$

Επομένως, $f\downarrow/\mathbb{R}\ \Leftrightarrow f:"1-1"$

$$D_f=\mathbb{R}\xrightarrow[f\downarrow]{f:\text{συνεχής}} f(D_f)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

αφού
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

Γ4.



Το ζητούμενο εμβαδόν, είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(MAB)=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{AB\cdot AM}{2}=[\ln x]_1^e-\frac{(2-1)\cdot 1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ $h(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ κοντά στο 1 με $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=l\in\mathbb{R}$

$f(x)=(x-1)\cdot h(x)+2x \quad (1)$

όπου $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot h(x)+2x\right]\overset{\text{ο}\cdot\ell+2}{=}2$

Έχουμε λοιπόν: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+\kappa\right]=-1+\kappa$

Οπότε, $-1+\kappa=2 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=3}$

Δ2. Κατ' αρχάς για $\kappa=3$, η f γράφεται:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3,\ x\in(0,2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,2)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων κι έχω:

$$f'(x)=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2-x+2}{x^2\cdot(2-x)}=\frac{(x+2)\cdot(1-x)}{x^2\cdot(2-x)}$$

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Παρατηρώ ότι:

$$\Delta_1=(0,1)\xrightarrow[f\uparrow]{f:\text{συνεχής}}f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to1^-}f(x)\right)=(-\infty,2)$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]\overset{\ln2-(+\infty)+3}{=}-\infty$

και $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\overset{f\text{ συνεχής}}{=}f(1)=2$

$0\in f(\Delta_1)$ οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\Delta_1=(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. Όμως $f\uparrow/\Delta_1$, επομένως το x_1 είναι μοναδικό.

Επίσης,

$$\Delta_2=(1,2)\xrightarrow[f\downarrow]{f:\text{συνεχής}}f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to2^-}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(-\infty,2)$$

αφού $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]\overset{(-\infty)-\frac{1}{2}+3}{=}-\infty$

και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\overset{f\text{ συνεχής}}{=}f(1)=2$

$0\in f(\Delta_2)$ οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\Delta_2=(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$. Όμως, $f\downarrow/\Delta_2$, επομένως το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $0<x_1<1<x_2<2$.

Έστω $x_1\ge\frac{1}{3}\underset{x\in(0,1]}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}f(x_1)\ge f\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow0\ge\ln\frac{5}{3}$ άτοπο αφού $\frac{5}{3}>1$

Οπότε $\boxed{x_1<\frac{1}{3}}$

Δ3. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right] \subseteq (0,1]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \overset{f(x_1)=0}{=} \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επίσης, για κάθε $x \in (0,2)$ έχουμε:

$$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$$

Οπότε, η $f' \downarrow /(0,2)$, άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. **i)** Αφού F, G δύο αρχικές της f στο $(0,2)$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$F(x) = G(x) + c \quad (2)$$

$$(2) \xrightarrow{x=x_1} F(x_1) = G(x_1) + c \overset{F(x_1)=0}{\Rightarrow} G(x_1) = -c$$

$$(2) \xrightarrow{x=x_1} F(x_2) = G(x_2) + c \overset{G(x_2)=0}{\Rightarrow} F(x_2) = c$$

Επομένως, $F(x_2) + G(x_1) = c + (-c) = 0$

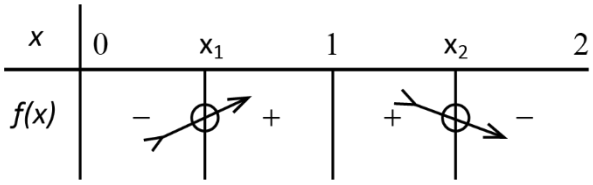
ii) Κατ' αρχάς, παρατηρώ ότι:

- $x \in (0,1)$: $x < x_1 \xrightarrow{f\uparrow} f(x) < f(x_1) \Rightarrow f(x) < 0$

  $x > x_1 \xrightarrow{f\uparrow} f(x) > f(x_1) \Rightarrow f(x) > 0$

- $x \in (1,2)$: $x < x_2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0$

  $x > x_2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x) < f(x_2) \Rightarrow f(x) < 0$



Επομένως, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

Θεωρώ $\kappa(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x,\ x \in [x_1, x_2]$

- $\kappa(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

  $$\kappa(x_1) = x_1 \cdot F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 \underset{F(x_1)=0}{\overset{(i)}{=}} -x_2 \cdot F(x_2) + x_1 - x_2 =$$

  $$= -\left(x_2 F(x_2) + x_2 - x_1\right) < 0$$

  $$\kappa(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 \overset{G(x_2)=0}{=} x_1 \cdot F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$$

  αφού $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

  Επομένως $F \uparrow / [x_1, x_2]$

  Έχουμε $x_2 > x_1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x_2) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) > 0$ και $0 < x_1 < x_2 < 2$

- Άρα $\kappa(x_1) \cdot \kappa(x_2) < 0$

  Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $\kappa(x_0) = 0$.

  Όμως, $\kappa'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

  Επομένως, $\kappa \uparrow [x_1, x_2]$, άρα x_0: μοναδικό.

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!