ΘΕΜΕΛΙΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 01 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 31.

Α2. **α)** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 65.

β) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 87.

Α3. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$\boxed{f'(x)}=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2-3\cdot 2x+5\cdot 1+0=\boxed{x^2-6x+5}$$

Β2. Για τις ρίζες και το πρόσημο του τριωνύμου x^2-6x+5, έχουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}x_1=5\\ x_2=1\end{cases}$$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,5]$ και
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[5,+\infty)$.

Επίσης,

- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=1$, τον αριθμό:

$$\boxed{f(1)}=\frac{1}{3}\cdot 1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\boxed{\frac{8}{3}},$$

- παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=5$, τον αριθμό:

$$\boxed{f(5)}=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=\boxed{-8}.$$

Β3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με $x_0=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f'(0)=5$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι: $y=5x+\beta$.

Επειδή, όμως το σημείο $(0,f(0))=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta$$

$$\beta=\frac{1}{3}$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση, είναι: $\boxed{y=5\cdot x+\frac{1}{3}}$

Β4. Έχουμε:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}}=f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=\boxed{12}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κατ' αρχάς,

$$\boxed{s}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)\cdot\cancel{(x-1)}}{2\cdot\cancel{(x-1)}}=\boxed{4}$$

αφού, για το τριώνυμο x^2+6x-7, έχουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=6^2-4\cdot 1\cdot(-7)=36+28=64>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm 8}{2}=\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-7\end{cases}$$

Γ2. Έχουμε,

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{s}{CV}\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{4}{0{,}2}\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{4}{\frac{2}{10}}\Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=20}$$

Γ3. Έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_5}{5}\Leftrightarrow 20=\frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}\Leftrightarrow 20=\frac{90+k}{5}\Leftrightarrow$$

$$90+\kappa=100\Leftrightarrow \boxed{\kappa=10}$$

Για τη διάμεσο (δ), διατάσσω σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις κι έχω:

14, 16, 18, 22, 30

επομένως, $\boxed{\delta}=t_{(3)}=\boxed{18}$.

Γ4. Αν y_i οι τιμές του νέου δείγματος και x_i οι τιμές του αρχικού, τότε:

$$y_i=x_i+\frac{10}{100}\cdot x_i=x_i+0{,}1\cdot x_i=1{,}1\cdot x_i$$

Επομένως, για τη νέα μέση τιμή $\bar{y}$ και τη νέα τυπική απόκλιση s_y, έχουμε:

$\bar{y}=1{,}1\cdot\bar{x}$ και $s_y=1{,}1\cdot s_x$.

Άρα, ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας, είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow CV_y = \frac{\cancel{1,1} \cdot s_x}{\cancel{1,1} \cdot \bar{x}} \Leftrightarrow \boxed{CV_y} = CV_x = \boxed{0,2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AOB}$ κι έχω:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$$

$$(OB)^2 = (AB)^2 - (OA)^2$$

$$y^2 = 10^2 - x^2$$

$y = \sqrt{100 - x^2}$ (η λύση $y = -\sqrt{100 - x^2}$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $y > 0$)

Επομένως, $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$.

Για το πεδίο ορισμού της *f*, έχουμε:

Πρέπει: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 100 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| < 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -10 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10 \Leftrightarrow \boxed{A = (0,10)}$$

Άρα, $\boxed{f(x) = \sqrt{100 - x^2}, \quad x \in (0,10)}$

Δ2. Αρχικά, έχουμε:

$$f'(x) = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \frac{-\cancel{2} \cdot x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Επομένως, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής, είναι:

$$\boxed{f'(8)} = -\frac{8}{\sqrt{100 - 8^2}} = -\frac{8}{\sqrt{36}} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

Δ3. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\boxed{\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2-8^2}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)\cdot(6+x)}{(x-6)\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{-\cancel{(x-6)}\cdot(6+x)}{\cancel{(x-6)}\cdot\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=-\frac{6+6}{\sqrt{100-6^2}+8}=\boxed{-\frac{3}{4}}$$

Δ4. Από **Δ2.**, έχουμε:

$f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}<0$ για κάθε $x\in(0,10)$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Παρατηρώ ότι:

$$x_1<x_3<x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \boxed{f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)}$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!