ΘΕΜΕΛΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 04 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 155.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 216.

Α4. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κατ' αρχάς,

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_g\cap D_h \ \ \mu\varepsilon\ \ h(x)\neq 0\right\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in[1,+\infty)\ \ \mu\varepsilon\ \ \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\neq 0\right\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in[1,+\infty)\ \ \mu\varepsilon\ \ \frac{x-1}{\sqrt{x}}\neq 0\right\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in[1,+\infty)\ \ \mu\varepsilon\ \ x\neq 1\right\}$$
$$=(1,+\infty)$$

$$\boxed{f(x)}=\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{x+1}{\cancel{\sqrt{x}}}}{\frac{x-1}{\cancel{\sqrt{x}}}}=\boxed{\frac{x+1}{x-1},\ \ x>1}$$

$$D_r=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_g\cap D_h\right\}=[1,+\infty)$$

$$\boxed{r(x)}=(g\cdot h)(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\boxed{x-\frac{1}{x},\ \ x\geq 1}$$

B2. **i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}<0 \text{ για κάθε } x>1.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, άρα και "$1-1$", δηλαδή αντιστρέφεται.

$$D_f=(1,+\infty)\xrightarrow[f\downarrow]{f:\text{συνεχής}} f(D_f)=(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to 1}f(x))=(1,+\infty)$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}+\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{x-1}\cdot(x+1)\right]\overset{(+\infty)\cdot 2}{=}+\infty$

όπου $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ και x-1>0 κοντά στο 1^+.

Άρα $f(D_f)=D_{f^{-1}}=D_f$

Θέτω, $f(x)=y \iff x=f^{-1}(x)$

$$\frac{x+1}{x-1}=y$$
$$x+1=y\cdot x-y$$
$$x(y-1)=y+1$$
$$x=\frac{y+1}{y-1}$$

Επομένως, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1},\quad x>1$

Άρα, $\boxed{f^{-1}=f}$

B3. Η συνάρτηση r είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, επομένως δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Παρατηρώ ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

επομένως, η ευθεία (ε) : y=x είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

Β4. Για την εξίσωση $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2 = 1 + 4\cdot r(x)$, έχουμε:

$\boxed{x>1}$

Η εξίσωση, γράφεται:

$$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 = 1 + 4\cdot\frac{x^2-1}{x}$$

$$x\cdot(x^2-1) = 4\cdot(x^2-1)$$

$$(x^2-1)(x-4) = 0$$

x=-1 ή x=1 ή $\boxed{x=4}$

απορ. απορ. Δεκτή

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$, δηλαδή,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-}(-2x+4+e^\lambda) = \lim_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda)$$

$$e^\lambda = 1+\lambda$$

$\boxed{\lambda=0}$

αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$ με την ισότητα να αληθεύει ΜΟΝΟ για x=0

Για λ=0, η f γράφεται: $f(x) = \begin{cases} -2x+5\ , & 0\leq x<2 \\ -x^2+4x-3\ , & x\geq 1 \end{cases}$.

Γ2. Παρατηρώ ότι:

- $x\in(0,2)$: $f'(x) = -2 < 0$ για κάθε $x\in(0,2)$
- $x\in(2,+\infty)$: $f'(x) = -2x+4 = -2\cdot(x-2) < 0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ δηλαδή $f'(x)<0$

για κάθε $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$, κι αφού η *f* είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, επομένως γνησίως μονότονη.

Η *f* παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο x=0 τον αριθμό maxf= $f(0)$=5.

Γ3. i) Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο [0,3], αφού <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, όπου:

- $$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-1} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2x+5-1}{x-1} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$
- $$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = -\lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}} = 0$$

ii) Παρατηρώ ότι:

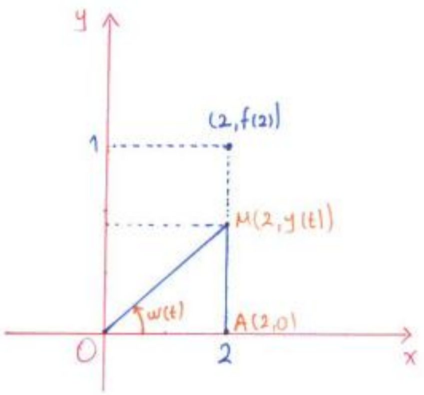
$$\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

Λύνω την εξίσωση: $f'(x) = -\frac{5}{3}$

- Για $x \in (0,2)$ η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη.
- Για $x \in (2,3)$
$$-2x+4 = -\frac{5}{3}$$
$$-6x+12 = -5$$
$$-6x = -17$$
$$x = \frac{17}{6}$$
Δεκτή

Επομένως, υπάρχει σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi)) \to \Gamma\left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη τη C_f είναι παράλληλη στην ευθεία ΔΕ.

Γ4.



Δίνεται: $y'(t)=0{,}5$ μον. μήκους/sec.

Τη χρονική στιγμή t_0 όπου το σημείο Μ θα συναντήσει τη C_f, θα έχουμε:

$$y(t_0)=f(2)=1$$

Για τη γωνία ω=ω(t), έχουμε:

$$\text{εφω(t)}=\frac{y(t)}{2}$$

Παραγωγίζω την τελευταία σχέση και έχω:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}$$

Για $t=t_0$:

$$\omega'(t_0)=\frac{y'(t_0)}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)\qquad(1)$$

Όπου έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega\, t_0=\frac{y(t_0)}{2}=\frac{1}{2}\qquad\text{και}\qquad \sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

Οπότε, $(1)\rightarrow\ \boxed{\omega'(t_0)}=\frac{0{,}5}{2}\cdot\frac{4}{5}=\boxed{\frac{1}{5}\ (\acute{\eta}\ 0{,}2)}$ rad/sec.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\cdot x-(\ln x+\alpha x)}{x^2}=\frac{1+\cancel{\alpha x}-\ln x-\cancel{\alpha x}}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \overset{\ln x\ "1-1"}{\Leftrightarrow} x=e$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} (0<)x<e$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} x>e$$

Απ' τον πίνακα μονοτονίας της f, παίρνουμε:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Ο.Μ.		

όπου, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=e$ τον αριθμό $\max f=f(e)=\dfrac{1+\alpha\cdot e}{e}$

κι επειδή $f((0,+\infty))=\left(-\infty,1+\dfrac{1}{e}\right]$, παίρνουμε:

$$\frac{1+\alpha\cdot e}{e}=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{e}}+\alpha=1+\cancel{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}.$$

Για $\alpha=1$, η f γράφεται:

$$f(x)=\frac{\ln x+x}{x}=\frac{\ln x}{x}+1,\quad x>0.$$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1<0 \\[2ex] f(1)=\dfrac{\ln 1}{1}+1=1>0 \end{array}\right\}\ f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$$

επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$.

Όμως, $f \uparrow / \left[\frac{1}{2},1\right] \subseteq (0,e]$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό στο $\Delta_1 = (0,e]$.

Επίσης,

$$\Delta_2 = (e,+\infty) \underset{f\downarrow}{\overset{f:\ \text{συνεχής}}{\rightarrow}} f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\right) = \left(1,\ 1+\frac{1}{e}\right),$$

αφού: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{1} = 1$ και

$$\lim_{x\to e^+} f(x) \overset{f:\ \text{συνεχής}}{=} f(e) = 1+\frac{1}{e}$$

όπου, $0 \notin f(\Delta_2)$, άρα το x_0 είναι μοναδικό στο $D_f = (0,+\infty)$.

Δ3. **i)** Κατ΄αρχάς:

- $x \in [e,+\infty)$: $f(x) = f(4) \overset{f:\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=4}$
- $x \in (0,e)$: Παρατηρώ ότι $f(4) = \frac{\ln 4}{4}+1 = \frac{2\cdot\ln 2}{4}+1 = \frac{\ln 2}{2}+1 = f(2)$,

  οπότε, η εξίσωση γράφεται:

  $$f(x) = f(2) \overset{f:\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} \boxed{x=2}$$

Άρα, η εξίσωση $f(x) = f(4)$, έχει δύο ακριβώς λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

ii) Η ανίσωση, ισοδύναμα γράφεται:

$$2^x \le x^2 \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x\cdot\ln 2 \le 2\cdot\ln x \overset{\div 2x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \overset{+1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\ln x}{x}+1 \ge \frac{\ln 2}{2}+1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \ge f(2)$$

- $x \in (0,e)$: $f(x) \ge f(2) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} x \ge 2$, άρα $x \in [e,2)$ (1)

- $x \in [e,+\infty)$: $f(x) \geq f(2) \overset{f(2)=f(4)}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(4) \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} x \leq 4$,

  άρα $x \in [e,4]$ (2).

Από $(1),(2)$: $\boxed{x \in [2,4]}$.

Δ4. Παρατηρώ ότι:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \begin{pmatrix} \text{Θέτω} \quad e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u \\ e^x dx = du \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u} du \\ x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u} \cdot \frac{1}{u} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u) \cdot f'(u)| du$$

Έχουμε από **Δ1.**: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \subseteq (0,e)$

και από **Δ2.**:

- $\left(\frac{1}{2}<\right) x < x_0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- $x_0 < x (<1) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν γράφεται:

$$\boxed{\mathrm{E}(\Omega)} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u) \cdot f'(u)| du = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} [-f(u) \cdot f'(u)] du + \int_{x_0}^{1} [f(u) \cdot f'(u)] du$$

$$= \left[-\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{x_0}^{1} \overset{f(x_0)=0}{=} 0 + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - 0 = \frac{(1-2\ln 2)^2 + 1}{2} =$$

$$= \boxed{2 \cdot \ln^2 2 - 2 \cdot \ln 2 + 1} \quad \tau.\mu$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!