

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 02 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186.
A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76.
A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161.
A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1. Παρατηρούμε ότι,
- $1 \in D_f = \mathbb{R}$
 - η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$
 - η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$
- οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat:

$$f'(1) = 0$$

$$3 + 2\alpha + 9 = 0$$

$$\boxed{\alpha = -6}$$

- B2. Για $\alpha = -6$, η f γράφεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίζοντας, παίρνουμε:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$		T.M	T.E	

$$\Delta_1 = [0, 1] \xrightarrow[f \uparrow]{f: \text{συνεχής}} f(\Delta_1) = [f(0), f(1)] = [-3, 1]$$

$0 \in f(\Delta_1)$, επομένως, υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Όμως, $f \uparrow / \Delta_1$, άρα το x_1 είναι μοναδικό.

$$\Delta_2 = [1, 3] \xrightarrow[f \downarrow]{f: \text{συνεχής}} f(\Delta_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

$0 \in f(\Delta_2)$, επομένως, υπάρχει $x_2 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Όμως, $f \downarrow / \Delta_2$, άρα το x_2 είναι μοναδικό.

$$\Delta_3 = [3, +\infty) \xrightarrow[f \uparrow]{f: \text{συνεχής}} f(\Delta_3) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-3, +\infty)$$

$$\text{αφού, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$0 \in f(\Delta_3)$, επομένως, υπάρχει $x_3 \in (3, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_3) = 0$.

Όμως, $f \uparrow / \Delta_3$, άρα το x_3 είναι μοναδικό.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει τρεις ακριβώς θετικές ρίζες.

B3. Παραγωγίζουμε την f' κι έχουμε:

$$f''(x) = 6x - 12$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Σ.Κ

Κυρτότητα: $f \cap / x \in [2, +\infty)$

$f \cup / x \in (-\infty, 2]$

Η f παρουσιάζει καμπή, στο σημείο $M(2, f(2)) \rightarrow \boxed{M(2, -1)}$

B4. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παραγωγίζουμε τη g κι έχουμε: $g'(x) = 1 + f'(x)$

Οι εξισώσεις εφαπτομένων των C_f και C_g , στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon_1): y = f'(\xi) \cdot x + [f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)]$$

και

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon_2): y = g'(\xi) \cdot x + [g(\xi) - \xi \cdot g'(\xi)] \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon_2): y = (1 + f'(\xi)) \cdot x + [f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)]$$

Παρατηρούμε ότι οι (ε_1) & (ε_2) (για $x=0$), τέμνονται στο σημείο $N(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$ του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x)^{1.0} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0,$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0,$$

επομένως η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} \stackrel{|x|=x}{=} \lim_{x > 0} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = +\infty \quad (\notin \mathbb{R})$$

επομένως, η συνάρτηση f , **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

- Γ2.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού είναι συνεχής και στα $(-\infty, 0)$ & $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων), επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0 (\in \mathbb{R}), \text{ αφού}$$

$$|e^x \cdot \eta\mu x| = |e^x| \cdot |\eta\mu x| \leq e^x \Leftrightarrow$$

$$-e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

απ' το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

Άρα, η $(\varepsilon_1): y = 0$ (άξονας $x'x$), είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{|x|=x}{=} \lim_{x > 0} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1 (\in \mathbb{R}) \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &\stackrel{|x|=x}{=} \lim_{x > 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} (\in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Άρα, η $(\varepsilon_2): y = x + \frac{1}{2}$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Γ3.** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - y = e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}, \quad x \in [-\pi, 0].$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$\left. \begin{aligned} g(-\pi) &= e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ g(0) &= e^0 \cdot \eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(-\pi) \cdot g(0) < 0$$

επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Γ4. Κατ' αρχάς, έχουμε:

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}, \quad x(t) \geq 0, t \geq 0.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M , είναι:

$$y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \frac{x'(t) \cdot (2 \cdot x(t) + 1)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}}.$$

Έστω, ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια, ώστε:

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= x'(t_0) && \Leftrightarrow \\ \frac{x'(t_0) \cdot (2 \cdot x(t_0) + 1)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} &= x'(t_0) && \begin{array}{l} \div x'(t_0) > 0 \\ \Leftrightarrow \end{array} \\ \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} &= 1 && \Leftrightarrow \\ 2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} &= 2 \cdot x(t_0) + 1 && \Leftrightarrow \\ \cancel{4 \cdot x^2(t_0)} + \cancel{4 \cdot x(t_0)} &= \cancel{4 \cdot x^2(t_0)} + \cancel{4 \cdot x(t_0)} + 1 && \Leftrightarrow \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Άτοπο.

Άρα, δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του M .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Κατ' αρχάς, η συνάρτηση g γράφεται:

$$g(x) = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}, \quad x > 0.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης, για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x) \cdot e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot (e^{\ln^2 x})'}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x) \cdot e^{\ln^2 x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2} \\ &= \frac{e^{\ln^2 x} [x \cdot f(x) - 2 \cdot F(x) \cdot \ln x]}{(e^{\ln^2 x})^2} = 0 \end{aligned}$$

αφού, $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως, από συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Δ2. i) Αρχικά, απ' τη δοσμένη σχέση, για $x = 1$, παίρνουμε: $f(1) = 0$.

Επίσης, αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) , θα έχουμε: $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow f'(1) = 2$.

Έχουμε, λοιπόν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(0)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{x-1}{\ln x}} = \frac{f'(1)}{1} = 2,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1.$$

ii) Από τη δοσμένη σχέση $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x$, παίρνουμε:

$$F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2 \cdot \ln x}, \quad 0 < x \neq 1 \quad (1).$$

Έχουμε, λοιπόν:

$$\boxed{F(1)} \stackrel{F: \text{συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} F(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{2 \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) \stackrel{i)}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{1}$$

Επίσης, από Δ1. έχουμε:

$$g(x) = c \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}} = c \quad \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow}$$

$$c = 1$$

Άρα, $\boxed{F(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0}$

Δ3. Παραγωγίζουμε την F και παίρνουμε:

$$F'(x) = \frac{2 \cdot \ln x}{x} \cdot e^{\ln^2 x}, \quad x > 0.$$

Από τον πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης F , παίρνουμε:

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	—	0	+
$F(x)$			

O.E

$$F \uparrow / x \in [1, +\infty) \quad \text{και} \quad F \downarrow / x \in (0, 1].$$

Η δοσμένη εξίσωση, ισοδύναμα γράφεται:

$$\boxed{F(x^2) - F(x)} + (x-1)^2 = 0 \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι:

- $x \in (0,1]$: $x^2 \leq x \stackrel{F\downarrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) \geq F(x)$, όπου η ισότητα αληθεύει μόνο για $x=1$,
- $x \in [1, +\infty)$: $x^2 \geq x \stackrel{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) \geq F(x)$, όπου η ισότητα αληθεύει μόνο για $x=1$.

Επομένως, η εξίσωση (2), αληθεύει ΜΟΝΟ όταν:

$$\begin{cases} F(x^2) - F(x) = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=1}.$$

Δ4. Κατ' αρχάς, $E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e |e^{\ln^2 x}| dx \stackrel{e^{\ln^2 x} > 0}{=} \int_1^e e^{\ln^2 x} dx.$

Όμως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$ (3), όπου η ισότητα αληθεύει μόνο για $x=0$.

(3) $\stackrel{x \rightarrow \ln^2 x}{\rightarrow} e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$, όπου η ισότητα αληθεύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow x=1$.

Έχουμε, λοιπόν:

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \quad (4)$$

Όμως, $I = \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = I_1 + I_2$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx = \left[x \cdot \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x \cdot \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e (2x)' \cdot \ln x dx \\ &= \left[x \cdot \ln^2 x \right]_1^e - \left[2x \cdot \ln x \right]_1^e + \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x \cdot \ln^2 x \right]_1^e - \left[2x \cdot \ln x \right]_1^e + \left[2x \right]_1^e \\ &= e - 0 - (2e - 0) + 2e - 2 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_1^e 1 dx = \left[x \right]_1^e = e - 1$$

Άρα, (4) $\rightarrow E > (e-2) + (e-1) \Leftrightarrow \boxed{E > 2e-3}.$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!