

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 03 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 93.
A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 16.
A3. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος
A4. α) $(c)' = 0$
β) $(x^2)' = 2 \cdot x$

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Ισχύει, $v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 + 40 = 50 \Leftrightarrow \boxed{v_1 = 10}$
Ισχύει, $N_1 = 10, N_2 = N_1 + v_2 = 25, N_3 = N_2 + v_3 = 36, N_4 = N_3 + v_4 = 44$
 $N_5 = N_4 + v_5 = 50$
 $f_1(\%) = \frac{v_1}{v} \cdot 100\% = \frac{10}{50} \cdot 100\% = 20\%$
 $f_2(\%) = \frac{v_2}{v} \cdot 100\% = \frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%$
 $f_3(\%) = \frac{v_3}{v} \cdot 100\% = \frac{11}{50} \cdot 100\% = 22\%$
 $f_4(\%) = \frac{v_4}{v} \cdot 100\% = \frac{8}{50} \cdot 100\% = 16\%$
 $f_5(\%) = \frac{v_5}{v} \cdot 100\% = \frac{6}{50} \cdot 100\% = 12\%$

Ο πίνακας συμπληρωμένος, έχει ως εξής:

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i (\%)$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	$v_1=10$	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

B2. $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4 + x_5 \cdot v_5}{v}$$

$$\bar{x} = \frac{0 + 15 + 22 + 24 + 24}{50} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{85}{50} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 1,7} \text{ ώρες.}$$

B3. Η διάμεσος ορίζεται ως ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n (πλήθος) είναι άρτιος αριθμός. Επειδή $n=50$ η διάμεσος δ , θα είναι:

$$\delta = \frac{t_{(25)} + t_{(26)}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{3}{2}} \text{ ώρες.}$$

B4. α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται το πολύ 3 ώρες είναι:

$$f_1(\%) + f_2(\%) + f_3(\%) + f_4(\%) = 20\% + 30\% + 22\% + 16\% = \boxed{88\%}$$

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες τότε οι νέες ώρες θα είναι : $y_i = x_i + 4$

Στην περίπτωση αυτή η νέα μέση τιμή:

$$\bar{y} = \bar{x} + 4 \Leftrightarrow \bar{y} = 1,7 + 4 \Leftrightarrow \boxed{\bar{y} = 5,7} \text{ ώρες.}$$

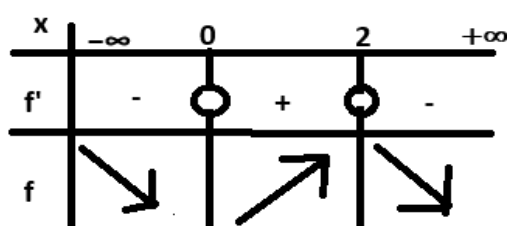
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε: $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -6x^2 + 12x$.

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 &\Leftrightarrow -6x \cdot (x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \boxed{x = 0} \text{ ή } \boxed{x = 2} \end{aligned}$$



Στο $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $[0, 2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $[2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Γ2. ▪ Για $x=0$ η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=\alpha$

▪ Για $x=2$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο το

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + \alpha \Leftrightarrow f(2) = 8 + \alpha$$

Έχουμε:

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 8 + \alpha}{2} = \frac{-8}{1} \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -12}$$

Γ3. Για $\alpha = -12$, η f , γράφεται: $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$.

Έχουμε:

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12$$

$$f(1) = -8$$

Επομένως, έχουμε το σημείο $M(1, -8)$.

Η εξίσωση εφαπτομένης, θα είναι της μορφής:

$$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \quad \mu\epsilon \quad \lambda = f'(1) = 6$$

$$\text{Άρα, } (\varepsilon): y = 6x + \beta$$

$$\text{Επίσης, } M(1, -8) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$$

Άρα, η ζητούμενη εφαπτομένη, έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y = 6x - 14$

Γ4. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4 &\geq 0 && \cdot (-2) < 0 \\ &\Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \\ &&& +(-4) \\ &\Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 - 4 \leq -4 \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq -4 \end{aligned}$$

που αληθεύει, αφού:

$$x \geq 2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) \leq -4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\lambda x + 7$$

$$f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$$

Έχουμε, λοιπόν:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

Δ2. Για $\lambda = -4$, οι f και f' γράφονται:

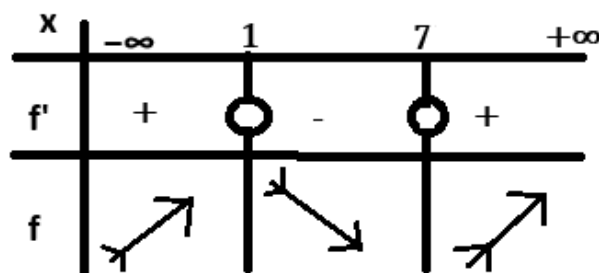
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad f'(x) = x^2 - 8x + 7$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 > 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \begin{cases} x_1 = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$



Στο $(-\infty, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $[1, 7]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $[7, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Δ3. Παρατηρούμε, ότι:

$2020, 2025 \in [7, +\infty)$, όπου $f \uparrow$, επομένως:

$$2025 > 2020 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(2025) > f(2020) \Leftrightarrow \boxed{f(2025) - f(2020) > 0} \quad (1)$$

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7]$, όπου $f \downarrow$, επομένως:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$$

Δ4. Παραγωγίζουμε την f' κι έχουμε: $f''(x) = 2x - 8$

Το ζητούμενο όριο, γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{(x-2)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})] = (2-8) \cdot (\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3} = \boxed{-12\sqrt{3}}$$

όπου για το τριώνυμο $x^2 - 10x + 16$, είχαμε:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως, } x^2 - 10x + 16 = (x-2) \cdot (x-8)$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!