ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 02 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 65.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 87.

Α3. Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και Β το σύνολο του $x \in A$ στα οποία είναι παραγωγίσιμη, τότε ως πρώτη παράγωγος της *f* ορίζεται το όριο:

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(x^2\right)' - \left(3x\right)' + \left(1\right)'$$

$$f'(x) = \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}x^2 - 2x - 3$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Β2. $f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \;\; \mu\varepsilon \;\; \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$\kappa\alpha\iota \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2-4}{2} = -1$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		μεγ.		ελ.	

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων της f' έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ *και* $[3,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$

Παρουσιάζει στο $x_1=-1$ τοπικό μέγιστο την τιμή:

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=-\frac{1}{3}-\cancel{1}+3+\cancel{1}=-\frac{1}{3}+\frac{\overset{3}{3}}{1}=-\frac{1}{3}+\frac{9}{3}=\frac{8}{3}$$

και στο $x_2=3$, τοπικό ελάχιστο την τιμή:

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+1=\frac{27}{3}-9-9+1=\cancel{9}-\cancel{9}-9+1=-8$$

B3. Έστω $y=\alpha\cdot x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο $A(0,f(0))$

$$\text{Ισχύει, } f'(0)=\alpha \Leftrightarrow \alpha=-3$$

$$f(0)=1 \textit{ άρα } A\in(\varepsilon) \textit{ δηλαδή}$$

$$f(0)=f'(0)\cdot 0+\beta \Leftrightarrow 1=-3\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$$

Άρα, η ζητούμενη ευθεία είναι η $\boxed{\varepsilon:\ y=-3x+1}$

B4. $$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2\cdot x-3}{x+1}\underset{(B2.)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-3)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x-3)=\boxed{-4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο μέσος αριθμός των βιβλίων, δίνεται απ' τον τύπο:

$$\bar{x}=\frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7}=\frac{23+\kappa}{7}$$

$$\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 5}$$

Γ2. Για κ=5, τοποθετώ τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά κι έχω:

$$0,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7$$

Η διάμεσος είναι η «μεσαία» παρατήρηση, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, επομένως, επειδή ν=7, η διάμεσος είναι:

$$\boxed{\delta = 4}$$

Γ3. Η διακύμανση s^2 του δείγματος, δίνεται απ' τον τύπο:

$$\boxed{s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\nu} = \frac{(0-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{7}$$

$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} \boxed{=4}$$

Γ4. Για να είναι το δείγμα ομοιογενές, πρέπει ο συντελεστής μεταβολής $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ να είναι μικρότερος ή ίσος από 0,1.

Αρχικά, έχουμε: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$,

οπότε: $CV = \frac{2}{4} = 0{,}5$ ή 50%

δηλαδή, το δείγμα <u>δεν</u> είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για τις πλευρές του ορθογωνίου, έχουμε:

$$x > 0 \quad \& \quad y > 0$$

Για το εμβαδόν του, έχουμε:

$$E = x \cdot y \Leftrightarrow 100 = x \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{100}{x} \quad (1)$$

Για την περίμετρο του οικοπέδου, έχουμε:

$$\Pi = 2\cdot x + 2\cdot y \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \Pi(x) = 2\cdot x + 2\cdot\frac{100}{x} \Leftrightarrow \boxed{\Pi(x) = 2\cdot x + 2\cdot\frac{100}{x},\ \ x>0}.$$

Δ2. Η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2\cdot x^2 - 200}{x^2} = \frac{2\cdot\left(x^2-100\right)}{x^2} = \frac{2\cdot(x-10)\cdot(x+10)}{x^2}.$$

Απ' τον παρακάτω πίνακα προσήμων της Π', έχω:

x	**0**	**10**	**+∞**
$\Pi'(x)$	-	0	+
$\Pi(x)$	↘		↗
		ελ.	

Επομένως, η συνάρτηση $\Pi(x)$, είναι:

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[10,+\infty)$

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$, ενώ

παρουσιάζει ελάχιστο για $x=10\text{m}$, όπου $(1)\to y=10\text{m}$, δηλαδή το ορθογώνιο, γίνεται τετράγωνο.

Δ3. Παρατηρούμε, ότι:

$$x_1 < x_2 \underset{x\in(0,10)}{\overset{\Pi\downarrow}{\Leftrightarrow}} \Pi(x_1) > \Pi(x_2)$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 < 0 \\ \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1 - x_2} \Leftrightarrow \boxed{A<0}$$

Δ4. Το ζητούμενο όριο, γράφεται:

$$\boxed{\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10\cdot x}-10}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\Delta 2.}{=}} \lim_{x\to 10}\frac{\frac{2\cdot(x-10)\cdot(x+10)}{x^2}\cdot\left(\sqrt{10\cdot x}+10\right)}{\left(\sqrt{10\cdot x}-10\right)\cdot\left(\sqrt{10\cdot x}+10\right)}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{\frac{2\cdot(x-10)\cdot(x+10)\cdot\left(\sqrt{10\cdot x}+10\right)}{x^2}}{\left(\sqrt{10\cdot x}\right)^2-10^2}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2\cdot(x-10)\cdot(x+10)\cdot\left(\sqrt{10\cdot x}+10\right)}{(10\cdot x-100)\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{2\cdot\cancel{(x-10)}\cdot(x+10)\cdot\left(\sqrt{10\cdot x}+10\right)}{10\cdot\cancel{(x-10)}\cdot x^2}$$

$$=\frac{2\cdot 20\cdot 20}{10\cdot 100}$$

$$\boxed{=\frac{4}{5}}$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!