ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ.Ε «ΘΕΜΕΛΙΟ» ΕΛΕΥΣΙΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 03 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 51.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186.

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κατ’ αρχάς,

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{x\in\mathbb{R} / x\in D_g \ \mu\varepsilon\ g(x)\in D_f\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} / x\geq 2\ \ \mu\varepsilon\ \sqrt{x-2}+1>1\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} / x\geq 2\ \ \mu\varepsilon\ \sqrt{x-2}>0\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} / x\geq 2\ \ \mu\varepsilon\ x-2>0\right\} \\ &= (2,+\infty)(\neq\varnothing) \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\boxed{h(x)}=(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=2\cdot\ln\left[\left(\sqrt{x-2}+1\right)-1\right]=2\cdot\ln\left(\sqrt{x-2}\right)$$

$$=\ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2\boxed{=\ln(x-2),\quad x>2}$$

Β2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με:

$h'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0$ για κάθε $x>2$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, επομένως και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

Αρχικά, έχουμε:

$$D_h=(2,+\infty)\underset{h\uparrow}{\overset{h:\ \text{συνεχής}}{\longrightarrow}} h(D_h)=\left(\lim_{x\to 2^+}h(x),\ \lim_{x\to+\infty}h(x)\right)=\mathbb{R}\left(=D_{h^{-1}}\right),\ \text{αφού:}$$

$$\lim_{x\to 2^+}h(x)=\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2)=\begin{pmatrix}\text{Θέτω } x-2=u\\ \text{όταν } x\to 2^+ \text{ τότε } u\to 0^+\end{pmatrix}=\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=\begin{pmatrix}\text{Θέτω } x-2=u\\ \text{όταν } x\to+\infty \text{ τότε } u\to+\infty\end{pmatrix}=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty .$$

Θέτω $h(x)=y \Leftrightarrow x=h^{-1}(y)$ κι έχουμε:

$$\ln(x-2)=y \Leftrightarrow \ln(x-2)=\ln e^y \overset{\ln x:\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} x-2=e^y \Leftrightarrow x=e^y+2$$

Άρα, $\boxed{h^{-1}(x)=e^x+2,\ \ x\in\mathbb{R}}$.

Β3. Για το ζητούμενο όριο, έχουμε:

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)}=\lim_{x\to 2}h(x)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\underset{\text{B2.}}{\overset{(-\infty)\cdot 2}{=}}\boxed{-\infty},\ \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2),\ \text{όπου}\ \ f'(x)=2\cdot\frac{1}{x-1}\ \Rightarrow\ f'(2)=2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **i)** Παρατηρώ ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa\cdot x^3+\mu\cdot x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa\cdot x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(\kappa\cdot x)=\kappa\cdot(+\infty).$$

- Αν $\kappa\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\notin\mathbb{R}$, ενώ

- αν $\kappa=0$, το όριο, γράφεται: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu\cdot x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mu\cdot\dfrac{1}{x}\right)\overset{\mu\cdot 0}{=}0(\in\mathbb{R})$.

Άρα, $\boxed{\kappa=0}$.

ii) Για $\kappa=0$, η *f* γράφεται: $f(x)=\dfrac{\mu\cdot x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη ως ρητή, με $f'(x)=\dfrac{\mu\cdot(x^2+1)-\mu\cdot x\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{\mu\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$

Αφού η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στην αρχή $O(0,0)$ των αξόνων, τότε:

$$f'(0)=1 \Leftrightarrow \boxed{\mu=1}$$

Γ2. **i)** Για $\mu=1$, παίρνουμε $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της *f*:

x	**-∞**	**-1**		**1**		**+∞**
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	↘		↗		↘	
		Τ.Ε.		Τ.Μ.		

Επομένως,

$f\downarrow / x\in(-\infty,-1]$, $f\uparrow / x\in[-1,1]$, $f\downarrow / x\in[1,+\infty)$ και

η *f* παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1=-1$, την τιμή $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$,

η *f* παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2=1$, την τιμή $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

ii) Για το σύνολο τιμών της *f*, έχουμε:

$$\Delta_1=(-\infty\,,-1)\ \underset{f\downarrow}{\overset{f:\,\text{συνεχής}}{\longrightarrow}}\ f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-1^-}f(x)\,,\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(-\frac{1}{2}\,,0\right),\ \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)\overset{f:\,\text{συνεχής}}{=}f(-1)=-\frac{1}{2}\ \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\Delta_2=[-1\,,1]\ \underset{f\uparrow}{\overset{f:\,\text{συνεχής}}{\longrightarrow}}\ f(\Delta_2)=[f(-1)\,,f(1)]=\left[-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right],\ \text{αφού}$$

$$\Delta_3=(1\,,+\infty)\ \underset{f\downarrow}{\overset{f:\,\text{συνεχής}}{\longrightarrow}}\ f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\,,\lim_{x\to1^+}f(x)\right)\overset{\Gamma1.}{=}\left(0\,,\frac{1}{2}\right),\ \text{αφού}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)\overset{f:\,\text{συνεχής}}{=}f(1)=\frac{1}{2}$$

Άρα, $\boxed{f(\mathbb{R})}=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_1)\cup f(\Delta_3)=\boxed{\left[-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right]}$

Για το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$, παρατηρώ ότι

- για $\alpha\neq0$, $\left(\frac{1}{2}+\alpha^2\right)\notin f(\mathbb{R})$, επομένως η εξίσωση <u>δεν</u> έχει ρίζες, ενώ
- για $\alpha=0$, η εξίσωση γράφεται $f(x)=\frac{1}{2}$, η οποία έχει <u>μοναδική</u> ρίζα (την $x=1$)

Γ3. i) Παίρνουμε το 1ο μέλος της ζητούμενης κι έχουμε:

$$\boxed{\mathrm{I}_\nu+\mathrm{I}_{\nu+1}}=\int_0^1\frac{x^{2\cdot\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\cdot(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x^{2\cdot\nu+1}}{x^2+1}+\frac{x^{2\cdot\nu+3}}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{2\cdot\nu+1}\cdot\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}dx=\left[\frac{x^{(2\cdot\nu+1)+1}}{(2\cdot\nu+1)+1}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2\cdot\nu+2},\ \ \nu\in\mathbb{N}}$$

ii) Έχουμε λοιπόν,

$$\boxed{\mathrm{I}_0=}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\boxed{\frac{\ln 2}{2}}$$

Από τη σχέση του ερωτήματος Γ3. i) και για $v=0$, παίρνουμε:

$$\mathrm{I}_0+\mathrm{I}_1=\frac{1}{2}\overset{\mathrm{I}_0=\frac{\ln 2}{2}}{\Leftrightarrow}\boxed{\mathrm{I}_1=\frac{1-\ln 2}{2}}.$$

Από τη σχέση του ερωτήματος Γ3. i) και για $v=1$, παίρνουμε:

$$\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=\frac{1}{4}\overset{\mathrm{I}_1=\frac{1-\ln 2}{2}}{\Leftrightarrow}\mathrm{I}_2=\frac{1}{4}-\frac{1-\ln 2}{2}\Leftrightarrow\boxed{\mathrm{I}_2=\frac{2\cdot\ln 2-1}{4}}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ συνάρτηση $h(x)=g(x)+x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-1\,,0]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων,

$h(-1)=g(-1)-1<0$

$h(0)=g(0)>0$, αφού $0<g(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως,

$h(-1)\cdot h(0)<0$,

άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(-1\,,0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$.

Επίσης, η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x)=g'(x)+1,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Από δοσμένη σχέση, παρατηρώ ότι $h'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ κι επειδή η h' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού g' συνεχής στο $\mathbb{R}$), από συνέπειες του θεωρήματος Bolzano, η h' θα διατηρεί πρόσημο, επομένως η h είναι γνησίως μονότονη.

Έχουμε όμως $h(-1)<h(0)$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η τιμή $x_1\in(-1\,,0)$, είναι μοναδική.

Δ2. Αφού f παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad (1)$$

Έχουμε, λοιπόν:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^{\cancel{2}}\left(g(x)+x\right)}{\cancel{x}}=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\cdot\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa\cdot x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(2\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\kappa\right)\overset{2\cdot1+1\cdot1-\kappa}{=}3-\kappa$$

$(1)\rightarrow$ $\boxed{\kappa=3}$.

Δ3. **i)** Παρατηρώ ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$f'(x)=2\cdot\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-3=\frac{2\cdot\sigma\upsilon\nu^3x-3\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+1}{\sigma\upsilon\nu^2x}>0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \text{ αφού}$$

για το πολυώνυμο $2\cdot\omega^3-3\cdot\omega^2+1$, έχουμε:

2	**-3**	**0**	**1**	**1**
↓	2	-1	-1	
2	-1	-1	-1	

οπότε,

$$2\cdot\omega^3-3\cdot\omega^2+1=(\omega-1)\cdot\left(2\cdot\omega^2-\omega-1\right)=(\omega-1)\cdot\left[\omega\cdot(\omega-1)+(\omega-1)\cdot(\omega+1)\right]=$$
$$=(\omega-1)^2\cdot(2\cdot\omega+1)$$

επομένως, $2\cdot\sigma\upsilon\nu^3x-3\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+1=(\sigma\upsilon\nu x-1)^2\cdot(2\cdot\sigma\upsilon\nu x+1)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, δηλ.

$$x\geq0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow \boxed{f(x)\geq0,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)}.$$

ii) Ισοδύναμα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{\pi}{3}$, έχει ακριβώς 1 ρίζα.

Έχουμε:

$$\Delta=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\ \underset{f\uparrow}{\overset{f:\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma}{\longrightarrow}}\ f(\Delta)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=[0,+\infty),$$ αφού

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\cdot\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3\cdot x)\overset{2\cdot1+(+\infty)-3\cdot\frac{\pi}{2}}{=}+\infty.$$

Παρατηρώ ότι $\frac{\pi}{3}\in[0,+\infty)$, επομένως θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (αφού $f(0)=0$) τέτοιο, ώστε $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$. Όμως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα το $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι μοναδικό.

Δ4. **i)** Κατ' αρχάς, $f(x)=x^2\cdot h(x)$, $x\in[x_1,0]$

Παρατηρώ ότι

$x^2\geq0$ για κάθε $x\in[x_1,0]$ και

για $x\geq x_1 \underset{\Delta1.}{\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}} h(x)\geq h(x_1)\Leftrightarrow h(x)\geq0$

Άρα, $f(x)\geq0$ για κάθε $x\in[x_1,0]$.

ii) Από Δ3 i) και Δ4 ii), έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αφού ο άξονας $y'y$ (x=0) χωρίζει το Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία Ω, έχουμε:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0}\left(x^2 \cdot \left(g(x)+x\right)\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\cdot \eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3\cdot x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0}\left(x^2 \cdot g(x)\right)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \left[-2\cdot \sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3\cdot x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0}\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x)\right]dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = \left(-2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{3\cdot\frac{\pi^2}{9}}{2}\right) - (-2-0-0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}\cdot g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0}\left(\frac{x^3}{3}\cdot g'(x)\right)dx + \left(0 - \frac{x_1^4}{4}\right) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\overset{g(x_1)=-x_1}{\Leftrightarrow} 0 - \frac{x_1^3\cdot(-x_1)}{3} - \int_{x_1}^{0}\frac{x^3}{3}\cdot g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\cdot\int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\cdot\ln 2 - 3$$

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ!!!